T.C. Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, Cilt:4, Sayı:1-2, Yıl:1989

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNDE PRİMAL VE DUAL PARAMETRELER ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Nihat AKGÜNDÜZ (*)

ÖZET

Her Doğrusal Programlama probleminin duali genel dualite tanımına bağlı olarak elde edilememekte ve başkaca tanım ve teoremlere ihtiyaç duyulmaktadır.Bununla birlikte, herhangi bir Doğrusal Programlama probleminin dualini elde etmek mümkün olsa bile primal ve dual parametreler arasındaki ilişkiler belirsiz kalmaktadır.Çalışmada önce, primal ve dual problemlerin yapıları kısaca açıklanmış daha sonra primal ve dual parametreler arasındaki dönüşümler, matrisiyel formdaki özellikleri ifade eden ilişkiler olarak özetlenmiştir.

I.GİRİŞ

Bir Doğrusal Programlama problemi genelde,

$\vec{c},\vec{x} \in R^n, \vec{b} \in R^m$ ve A matrisi mxn tipinde ($m,n \in N$ ve $m \neq n$) bir matris olmak

üzere;

Amaç Fonksiyonu : $\max(\min) Z = \vec{c}^{T} \vec{x}$

Kısıtlayıcılar : $A\vec{x} \{\leq,=,\geq\} \vec{b}$ ....(1)

Pozitif kısıtlama : $\vec{x} \geq \vec{c}$

şeklinde tanımlanmaktadır (Hadley, 1969;s.71). Bu genel tanımdan hareketle problemin dualini yazmak mümkündür. Ancak kolaylık olması bakı-

(*) Dr. , D.E.İ.İ.B.F. Muğla İşletmecilik Yüksekokulu.

mından problem, kısıtlayıcılarının tümü " $\leq$ " olan bir maximizasyon problemi olarak düşünüldüğünde,

$$\text{Amaç Fonksiyonu} \quad : \max Z = \vec{c}^{\,T} \vec{x}$$

$$\text{Kısıtlayıcılar} \quad : A\vec{x} \leq \vec{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{Pozitif Kısıtlama} \quad : \vec{x} \geq \vec{0}$$

olur ve bu modelin duali ise $\vec{y} \in R^m$ olmak üzere;

$$\text{Amaç Fonksiyonu} : \min C = \vec{b}^{\,T} \vec{y}$$

$$\text{Kısıtlayıcılar} \quad : A^T \vec{y} \geq \vec{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\text{Pozitif kısıtlama} \quad : \vec{y} \geq \vec{0}$$

ifade edilir (Vajda, 1981; s. 50).(I)-deki genel tanıma uyan bazı problemler uygun matematiksel işlemlerle (2)-deki forma dönüştürülse bile karar değişkenlerindeki pozitif olmama, kısıtsızlık, v.b. nedenlerle (3)-deki gibi dualini yazmak mümkün değildir ve bu gibi hallerde dual model (3)-dekinden farklı biçimde formüle edilir (Cooper-Stainberg, 1974; s. 141-147 ve Taha, 1976; s. 81-85).

Dualite kavramı ekonomik temelde; ekonomik bir sorun doğrusal programlama problemi şeklinde formüle edildiğinde, bu problemin dualine uyan ilintili ekonomik bir sorun genellikle vardır düşüncesine dayanır (Akalın, 1979; s. 278). Örneğin, ekonomik bir soruna kazancın maximizasyonu olarak yaklaşıldığında elde edilen optimum çözüm ile maliyetin minimizasyonu şeklinde yaklaşıldığında elde edilen optimum çözüm birbirinin aynısıdır ve her iki çözüm için amaç fonksiyonlarının değerleri birbirine eşittir (Hillier-Lieberman, 1974; s. 78-97 ve Gaver-Thompson, 1973; s. 194-199). Burada akla gelen en önemli soru; Kârın maximizasyonuna uyan doğrusal programlama probleminden (primal) maliyetin minimizasyonuna uyan doğrusal programlama problemine (dual) geçişte uygun matris dönüşümlerinin nasıl yapılmış olduklarıdır. Bir başka deyişle, primal ve dual parametreler arasında hangi bağıntıların olduğudur. Her ne kadar (3)-ifadesinin (2)-nin duali olduğu tanımla belirtilmişse de primal ve dual parametreler arasındaki bağıntılar (ilişkiler) belirsiz kalmaktadır. Şimdi bu ilişkileri kısaca açıklamaya çalışacağız.

II.PARAMETRELER ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Doğrusal programlama probleminin (I)-deki gibi verildiğini kabul edelim. Eğer " $\geq$ " eşitsizliğinin yer aldığı kısıtlar " $\leq$ " şekline dönüştürülür ve eşitlik (=) lerin bulunduğu kısıtlar da " $\leq$ " olarak alınırsa (I)-modelinin duali (3)-deki gibi olur (Esin, 1981; s. 181). Şu halde primal problem olarak (2)-yi almak sakınca yaratmayacaktır.Burada uygunluğu sağlamak bakımından $1 \leq r, s \leq m, r \leq s$ ve $r, s \in N$ olmak üzere r.ci kısıtın " = ", s.ci kısıtın "$\geq$ " ve diğer kısıtların "$\leq$ " şeklinde olduklarını varsayalım. O halde (I)-deki modelden hareketle bir maximizasyon problemi,

$$
\begin{aligned}
\max Z = c_1x_1 + \dots + c_rx_r + \dots + c_sx_s + \dots + c_nx_n \\
a_1\,x_1 + \dots + a_{1n}\,x_n \leq b_1 \\
\cdot \qquad \cdot \\
\cdot \qquad \cdot \\
a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n = b_r \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4) \\
\cdot \qquad \cdot \\
\cdot \qquad \cdot \\
a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n \geq b_s \\
\cdot \qquad \cdot \\
\cdot \qquad \cdot \\
a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
x_j \geq 0 \;;\; j=1,\dots,n
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir.r. ci kısıt " $\leq$ " alınır ve s.ci kısıtta eşitsizliğin her iki yanı -1 ile çarpılırsa $\vec{y} \varepsilon R^m$ olmak üzere, modelin duali;

$$\min C = b_1y_1 + \ldots + b_ry_r + \ldots - b_sy_s + \ldots + b_my_m$$

$$a_{11}y_1 + \ldots + a_{r1}y_1 + \ldots - a_{s1}y_s + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$a_{1n}y_1 + \ldots + a_{rn}y_r + \ldots - a_{sn}y_n + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n$$

$$y_i \geq 0 \;;\; i=1, \ldots ,m$$

şeklinde olur. Şimdi (4)- modelinde r.ci kısıtı "≤" olarak alarak tüm kısıtları uygun aylak (slack) değişkenleri toplamak ve artık (surplus) değişkenleri de çıkarmak suretiyle eşitlik şekline dönüştürelim.

$$\max Z = c_1x_1 + \ldots + c_rx_r + \ldots + c_sx_s + \ldots + c_nx_n + o.(\sum_{i=1}^{m} x_{n+i})$$

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_r + x_{n+r} = b_r \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\vdots$$

$$a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n - x_{n+s} = b_s$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

$$xj \geq 0 \;;\; j=1,\ldots,n \;,\; x_{n+i} \geq 0 \;;\; i=1,\ldots,m$$

Böylece dönüştürülmüş modelin katsayılar matrisinin;

$$
\overline{A} = \begin{bmatrix}
a_{11} \dots a_{1n} & 1 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \\
\vdots & \vdots \\
a_{r1} \dots a_{rn} & 0 \dots 1 \dots 0 \dots 0 \\
\vdots & \vdots \\
a_{s1} \dots a_{sn} & 0 \dots 0 \dots -1 \dots 0 \\
\vdots & \vdots \\
a_{m1} \dots a_{mn} & 0 \dots 0 \dots 0 \dots 1
\end{bmatrix} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (7)
$$

olduğu görülür.

Eğer $\overline{A}$ matrisinde ;

$$
S = \begin{bmatrix}
1 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \\
\vdots \\
0 \dots 1 \dots 0 \dots 0 \\
\vdots \\
0 \dots 0 \dots -1 \dots 0 \\
\vdots \\
0 \dots 0 \dots 0 \dots 1
\end{bmatrix} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (8)
$$

alınırsa A matrisini $\overline{A}$ ve S alt-matrislerine bağlı olarak;

$$
\overline{A} = (A, S) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (9)
$$

şeklinde yazabiliriz. Burada A matrisi x_j karar değişkenlerinin katsayılarından oluşan matris ve S de x_{n+i} aylak (ve artık) değişkenlerin katsayılarından oluşan matristir. Bununla birlikte (5)-deki dual modelin kısıtlayıcılarından uygun artık (surplus) değişkenlerin çıkarılması ile kısıtlar eşitlik haline gelir.

$$\min C = b_1y_1 + \ldots + b_ry_r + \ldots - b_sy_s + \ldots + b_my_m + 0 \,.\, (\sum_{j=1}^{n} y_{m+j})$$

$$a_{11}y_1 + \ldots + a_{r1}y_r + \ldots - a_{s1}y_s + \ldots + a_{m1}y_m - y_{m+1} = c_1$$

$$\ldots\ldots(10)$$

$$a_{1n}y_1 + \ldots + a_{rn}y_r + \ldots - a_{sn}y_s + \ldots + a_{mn}y_m - y_{m+n} = c_n$$

$$y_i \geq 0;\ i=1, \ldots, m \quad , \quad y_{m+j} \geq 0;\ j=1, \ldots, n$$

Eğer (10)-daki dual modelin katsayılar matrisi $\overline{A}^*$ ile gösterilirse;

$$\overline{A}^* = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{r1} \ldots -a_{s1} \ldots a_{m1} -1 \ldots 0 \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \\ a_{1n} \ldots a_{rn} \ldots -a_{sn} \ldots a_{mn} \;\; 0 \ldots -1 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

olur ve $\overline{A}^*$ matrisinde;

$$S^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & -1 \ldots & 0 \\ . & & . \\ & . & \\ 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

alınırsa $\overline{A}^*$ matrisini A^* ve S^* alt-matrislerine bağlı olarak;

$$\overline{A}^* = (A^*, S^*) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada A^* matrisi y_i dual karar değişkenlerinin katsayılarından oluşan matris ve S^* de y_{m+j} artık (surplus) değişkenlerinin katsayılarından oluşan matristir.

Gelinen bu noktada çalışmanın esasını oluşturan primal parametreler $(A,S,\vec{b},\vec{c})$ ile dual parametreler $(A^*, S^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*)$ arasındaki ilişkileri (bağıntıları) yazabiliriz.

1-) $A = S(A^*)^T$

2-) $A^* = A^T S$

3-) $\vec{c} = -S^*\vec{b}^*$

4-) $\vec{c}^* = S\vec{b}$

5-) $S = S^{-1}$ ve $S^* = (S^*)^{-1}$

6-) Eğer A bir kare matris ise $S = (A^T)^{-1}A^*$ dir.

7-) $\vec{b} = S\vec{c}^*$

8-) $\vec{b}^* = -S^*\vec{c}$

Eğer primal karar değişkenlerinin en az birisinin pozitif olması istenmiyorsa ya da kısıtlayıcıların tümü eşitlik şeklinde veriliyorsa yukarıdaki bağıntılardan bazılarının gerçekleşmediği görülecektir. Bununla birlikte bu bağıntıları ıspatlamak son derece kolay olduğundan bağıntı 2-nin ıspatıyla yetinilmiştir.

$$A^T S = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ a_{r1} \cdots a_{rn} \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ a_{s1} \cdots a_{sn} \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ \cdot \quad\quad\quad \cdot \\ 0 \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \\ \cdot \quad\quad\quad \cdot \\ 0 \ldots 0 \ldots -1 \ldots 0 \\ \cdot \quad\quad\quad \cdot \\ 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{r1} \cdots a_{s1} \cdots a_{m1} \\ a_{1n} \cdots a_{rn} \cdots a_{sn} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \ldots -1 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{r1} \cdots -a_{s1} \cdots a_{m1} \\ a_{1n} \cdots a_{rn} \cdots -a_{sn} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} = A^*$$

III. SONUÇ

Çalışmada primal ve dual orijinal parametrelerle yapay (dummy) parametreler arasındaki ilişkiler (bağıntılar) kısaca açıklanmış oldu. Bu bağıntıların; primal karar değişkenleri ve aylak (veya artık) değişkenlerle dual karar değişkenleri ve aylak (veya artık) değişkenler arasındaki bağıntıların (Hillier-Lieberman, 1974; S.85-87) değişik bir ifadesi olduğu söylenebilir. Matrisiyel formdaki bu bağıntılar (I-8) dan değişkenler arasındaki bağıntılara geçilememesinin nedeni primal ve dual modellerin optimum temel (basis) lerinin doğrudan hesaplanamaması olmaktadır.

ON THE RELATIONS BETWEEN THE PRIMAL AND DUAL PARAMETERS IN LİNEAR PROGRAMMING PROBLEMS

The duality of every Linear Programming problem can not be obtained depending on the general definition of duality and other definitions, and theorems are required Nevertheless, even if the duality of any Linear Programming problem is obtained, then the relations which are between the primal and dual parameters will be improper. In this paper, first, the structures of primal and dual problems were explained briefly, then the mappings which are between the primal and dual parameters were summarized as the relationships which are the properties ın matrix form.

KAYNAKÇA

HADLEY, G. (1969 ; **Linear Programming**, Addison-Wesley Publishing Co., London

VAJDA, S. (1981) ; **Linear Programming; Algorithms and Applications**, Chapman, and Hall. London.

COOPER, L., (1974)
D. Stainberg ; **Methods and Applications of Linear Programming**, W.B., Saunders, Philadelphia.

TAHA, A. Hamdy (1976) ; **Operations Research; An İntroduction**, Mac MillanPublishing Co., New York.

AKALIN, Sedat (1979), **Yöneylem Araştırması**,Ege Üniversitesi, İşletme Fakültesi Yayını, İzmir.

HILLIER, Frederick S.,
Gerald J. Lieberman (1974) ; **Operations Research**, Holden-Day, San Fransisco

GAVER, Donald P.,
Gerald L. Thompson (1973); **Programming and Probability Models in Operations Research**, Brooks/Cole Publishing Co., Monterey.

ESİN, Alptekin (1981) ; **Yöneylem Araştırmasında Yararlanılan Karar Yöntemleri**, A.İ. T.İ.A Yayını, Ankara.