T.C. Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari
Bilimler Fakültesi Dergisi, Cilt:5, Sayı:1-2, Yıl:1990

İSTATİSTİKSEL KONTROL KARTLARINDA YENİ BİR KÜTOP TARİFESİ

Ali ŞEN(*)

ÖZET

Küçük sapmalara karşı, SHEWHART kontrol kartlarına oranla daha duyarlı olan KÜTOP kontrol kartları, kendine has uygulama alanlarının ortaya çıkmasına neden olmuştur. SHEWHART kontrol kartları ise büyük sapmalarda KÜTOP kontrol kartlarına göre daha etkilidir.

Bu çalışmada normal dağılış varsayımı altında standart KÜTOP tarifesi ile SHEWHART (3,2,2) tarifesinin kombinasyonu ile yeni bir KÜTOP tarifesi oluşturmuş ve bu iki tarifeyle ortalama işleme uzunlukları açısından karşılaştırılması yapılmıştır.

GİRİŞ

Üretimden periyodik olarak alınan örnek istatistiklerine dayanarak, ürün kalitesinin kontrol altında tutulması çalışmaları Dr. A. Walter SHEWHART ile başlamıştır. SHEWHART kartlarının en önemli dayanağı, bireysel gözlemlerin dağılışı ne olursa olsun ortalamalarının dağılışlarının normal olması veya normale yaklaşmasıdır. Böylece gerek sürekli değişkenler için gerekse kesikli değişkenler için normal dağılım testlerinin uygulanabileceği SHEWHART kontrol kartları ortaya çıkmıştır. Ancak 1954 yılında PAGE tarafında ortaya konulan Ortalama İşletme Uzunluğu (Averega Run Length) kavramı SHEWHART kartlarının büyük sapmalarda etkin, küçük sapmalarda ise duyarsız olduğunu ortaya koymuştur (5). Ortalama İşletme Uzunluğu, ortalama olarak kaç birimlik üretim de bir müdahaleye gerek duyulduğunu tanımlar. Böylece PAGE

(*) Yrd.Doç.Dr., D.E.Ü. İ.İ.B.F.Ekonometri Bölümü.

(1954)'in ortaya koyduğu bu kavram kontrol kartlarının etkinliklerini karşılaştırmak amacıyla kullanılmaktadır. Süreç ortalamasının arzulanan ortalamadan standart sapma cinsinden farklılıkları kullanılarak oluşturulduğu ve bu seviyeleri için Ortalama İşletme Uzunluklarının hesaplanarak (veya simülasyonla elde edilerek) çizilen grafiklerine Ortalama İşletme Uzunluğu eğrisi denilmektedir. Bu noktadan hareketle farklı iki tarifenin Ortalama İşletme Uzunlukları eğrileri çizilerek karşılaştırabilmesi mümkün olabilmektedir.

2. Kümülatif Toplam Kontrol Kartları

Kümülatif Toplam (Cumulative Sum) Kontrol kartları; gözlemleri, hedeflenen değerden farklarının kümülatifi olan kontrol kartlarıdır. Hedeflenen değerin T olduğu $x_i \sim N(T,\sigma)$ gözlem serisi için, n.inci gözlemin kümülatif toplam (Kütop) değeri

$$C_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-T}{\sigma}\right)$$

olarak hesaplanır. Böylece bir Kütop kontrol kartı i.inci gözleme karşılık C_i değerlerinin grafiği ile çizilebilir. Kütop kontrol kartlarında gözlemlerin üretim sırasına göre ve üretimden eşit periyotlarda alındığı varsayılır.

Süreç ortalamasının hedeflenen değerlerden uzaklaşması yalnızca bir yönde kontrol edilecekse tek taraflı Kütop, her iki yönde uzaklaşmaların kontrol edilmesi durumunda iki taraflı Kütop kontrol kartı hazırlanır.

Pozitif ve negatif sapmalar için Kütop değerleri sırasıyla

$$C_{Hi}=\max\left[0,\left(\frac{x_i-T}{\sigma}\right)+C_{H(i-1)}\right]$$

$$C_{Li}=\min\left[0,\left(\frac{x_i-T}{\sigma}\right)+C_{L(i-1)}\right]$$

şeklinde seçilecek KÜTOP kontrol kartı üzerinde belirtilir (3). Böylece iki taraflı KÜTOP kontrol kartının, iki tek taraflı KÜTOP kontrol kartının birlikte kullanılması ile eşdeğer olduğu kolayca görülebilir.

Gözlem altına alınan j. grubun ortalaması (m_j) KÜTOP değerlerinden (r+1, s) gözlem aralığından

$$\mu_j = \frac{C_s - C_r}{s-r} + T$$

ile hesaplanır (7). Eşitliğin sağındaki ilk terim (r+1,s) gözlem aralığında gözlemlerin nedeflenen değerden sapmalarının ortalamasını ifade eder.

Karar Kuralı

Kümülatif toplamları kullanarak süreç ortalamasındaki değişikliği ortaya çıkarmada kullanılan en etkili karar kuralı, karar aralığı(decision interval) karar kuralıdır (2). Karar aralığı kural C_i KÜTOP değerlerini, sürecin özelliklerine göre daha önceden belirlemiş bir "h" değeri ile karşılaştırır. Burada "h", karar aralığı olarak tanımlanır (1). Bu durumda karar kuralı, pozitif sapmaları dikkate alan tek taraflı KÜTOP kontrol kartında,

$$C_H \geq h$$

benzer şekilde negatif sapmaları dikkate alan tek taraflı KÜTOP kontrol kartında

$$C_L \leq -h$$

olacaktır. Yukarıda belirtilen iki koşuldan biri gerçekleştiğinde, süreç ortalamasının istatistiksel olarak kontrol altında olmadığı kabul edilir. İki taraflı karar aralığı kuralında, herhangi bir yöndeki artışın diğer yönde uyumlu bir azalışa neden olacağı açıktır. KEMP (1962), karar aralığı kuralının, C_i değerindeki şansa bağlı değişmeler ile süreç ortalamasında ortaya çıkan değişikliklere birbirinden ayırmada başarılı olduğunu belirtmiştir.

Tek taraflı (pozitif sapmalar için) KÜTOP kontrol kartı karar aralığı, karar alternatifleri aşağıda belirtilmiştir.

$C_H \geq h$ süreç ortalaması kontrol dışındadır ve test red ile ile sonuçlanır. Bu noktadan itibaren yeni bir test başlar.

$C_H < h$ ve süreç ortalaması hakkında karar verilmez ve yeni

$C_H > 0$ bir örnek alınarak yeniden test yapılır

$C_H \leq 0$ süreç ortalaması kontrol altındadır ve test kabul ile sonuçlanır. Bu noktadan itibaren yeni bir test başlar.

Karar aralığı kuralı bu görünümüyle WALD'ın ardışık olasılık oranı testine eşdeğer yapıdadır. Böylece isabetli olarak belirlenmiş bir h değeri için, süreç ortalaması için yapılan karar aralığı testi, alınan her gözlemle birlikte;

$$H_o: X_i \sim N\left(T_o, \sigma^2\right)$$

$$H_1: X_i \sim N\left(T_1, \sigma^2\right)$$

testinin uygulanmasına eşdeğer bir karar prosedürü olmaktadır.

İki taraflı karar kuralı için, $T \pm \Delta$ durumunda süreç ortalamasının kontrol dışı olduğu durumu ele alalım. Bu durumda kart üzerinde hedeflenen değer yerine sırasıyla pozitif ve negatif sapmalar için

$$k_1 = T + \frac{1}{2}\Delta$$

$$k_2 = T - \frac{1}{2}\Delta$$

referans değerinin kullanılması uygun olacaktır (2). Ayrıca karar aralığı "h" bu yeni durum için yeniden uygun olarak seçilmelidir. Burada Δ , bir gözlem periyodunda hızlı bir şekilde ortaya çıkabilecek en küçük değişiklik olarak tanımlanmaktadır. İki taraflı karar aralığı kuralı uygulanmasında karar parametreleri (h, k_1, k_2) nin seçimi için sabitleştirilmiş ortalama işletme uzunlukları kullanılmaktadır (6). Ortalam işletme uzunlukları, süreç ortalamasının kabul edilebilir ve reddedilebilir kalite ve seviyelerinde sabitleştirilerek parametrelerin seçimi işlemine gidilmektedir.

Kümülatif toplam kontrol kartlarının, karar aralığı kuralı için integral eşitliklerinin analitik çözümleri oldukça ileri matematik analiz tekniklerinin kullanılmasına gerektirmektedir (8). Ancak integral eşitlikleri çözümleri sonucu elde edilecek ortalam.. işletme uzunlukları için bazı nomogramlar geliştirilmiştir. Ek 1'de WOODWARD ve GOLDSMITH'in hazırladıkları nomogramlar sunulmuştur. Nomogramların kullanılması oldukça basittir.Bilinen T,T_1,h,k ve N değerleri için bulunan noktalar, nomogram üzerinde bir cetvel yardımıyla birleştirildiğinde, cetvelin ortalama işletme uzunluğunu veren eğriyi kesim noktasındaki değer, tarifenin ortalama işletme uzunluğunu vermektedir.

3.Yeni Bir KÜTOP Tarifesi

Toplamların sürekliliği düşüncesi, Shewhart $\overline{X}$ kartındaki uyarı sınırlarıyla KÜTOP kartının kombinasyonu ile ortaya çıkmıştır. Bu yaklaşıma göire uyarı sınırları T± w s olan Shewhart X kartında T±S aralığına düşen gözlemlere sıfır, (T - 2 s, T- s) aralığına düşen gözlemlere -1 ve benzer olarak tüm standart sapma birimli aralıklara tam sayılarla belirtilen skorlar atanır. Elde edilen skorların kümülatifleri kullanılarak bir karar aralığı tarifesi oluşturulabilir. Süreç ortalaması değiştiğinde Kümülatif skorlar değişmenin gerçekleştiği yönde büyürken, aynı zamanda Shewhart $\overline{X}$ kartı uyarı sınırlarıyla kontrol sınırları aralığına özel skorlar atanarak farklı tarifeler oluşturulabilir. Kümülatifleri alınacak gözlemler için,

$$y_i = \text{Sign}(x_i - T) \,.\, \text{Int} \left| \frac{x_i - T}{S.\sigma} \right|$$

değişkenini tanımlayalım. Burada y_i değişkeni, birinci çarpanı ile hedeflenen değere göre değişkenin işaretini ve ikinci çarpana göre "s"

birimli standart sapma aralıklarında standardize değişkeni pozitif tam sayısal değerinden oluşmaktadır. Burada s=1 alındığında, bir standart sapma birimini aralıklar için skorlar atanacaktır. Elde edilen y_i kesikli değişkenin beklenen değeri ve varyansının süreç ortalamasının hedeflenen değerde eşit olduğu durumlarda, bir gözlem için;

$$F(y_i) = 0$$

olduğu görülebilir.Tek taraflı bir tarife için sırasıyla pozitif ve negatif yöndeki değişkenleri y_i^+ ve y_i^- ile gösterildiğinde,

$$E(y_i^+) = 0{,}1827$$

$$E(y_i^-) = -0{,}1827$$

olarak bulunabilir. Yalnızca pozitif sapmaları dikkate alan tek taraflı bir tarifede alınan "n" gözlem için kümülatif toplamların beklenen değeri ($E(K_i^+)$) ve varyansı ($V(K_i)$),

$$E(K_i^+) = 0{,}1827 \cdot n$$

$$V(K_i) = 0{,}4666 \cdot n$$

olarak elde edilebilir. Böylece $E(K_i^+)$için I.tip hatası belirlenmiş güven aralığı ,

$$\left(0{,}1827.n - z_{\alpha/2} \cdot 0{,}683.\sqrt{n}\right) < E\left(K_i^+\right) < \left(0{,}1827.n + z_{\alpha/2} \cdot 0{,}683.\sqrt{n}\right)$$

ile elde edilebilir Burada K_i^+, y_i^+ değişkenlerinin i. KÜTOP değerini beliritir. Böylece y_i^+ değişkenleri y_i^- değişkenlerinden bağımsız olarak kümüle edildiğinde K_i^+ değeri ardışık testlerdeki test istatistiği olarak kullanılabilir Burada, Shewhart kartında $\pm 3S$ kontrol sınırlarına göre;

$$A_1 = 0{,}1788.n$$

$$A_2 = 0{,}1788 \,.\, n + z_{\alpha/2} \,.\, 0{,}683.n$$

olarak alınırsa, herhangi bir andaki K_i^+ değeri A_1'den küçük olduğunda ardışık test, süreç ortalamasının kontrol altında olduğu; A_2'den büyük olduğunda süreç ortalamasının kontrol dışında olduğu kararıyla sonuçlanır. Eğer K_i^+, A_1 ve A_2'nin arasına düşerse yeni örnek alma yoluna gidilir. Böylece yukarıda tanımlanan kontrol tarifesi WALD'ın ardışık olasılık oranı testine benzer bir yapıya kavuşturulabilmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken iki nokta vardır. Birincisi pozitif ve negatif y_i değişkenleri ayrı ayrı kümüle edilmektedir. İkincisi ise A_1 ve A_2 değerleri hesaplanırken kullanılacak "n" değerinin testin başladığı andan itibaren alınan gözlem sayasına bağlı olması gerektiğidir.

Benzer yaklaşımla y_i^- değişkenleri için K_i^- kullanılarak negatif y_i'ler için tek taraflı bir tarife oluşturulabilir. Negatif tek taraflı tarifede $B_1 = -A_1$ $B_2 = -A_2$ olarak alınırsa, K_i^- değeri B_1 'den büyük olduğunda test kabul, B_2 'den küçük olduğunda ise red ile sonuçlanır.Benzer olarakB_2 ve B_1 aralığı için yeni örnek alma yoluna gidilir. İki tek taraflı tarife birlikte kullanıldığında, iki taraflı bir tarifeye eşdeğer bir tarife elde edilebilir.

Yukarıda tanımlanan durumda a = 0.05 ve testin başladığı andan itibaren alınan örnek sayısı 50 olsun. Normal dağılış varsayımı altında gözlemlerin yarısının hedeflenen değerden büyük, diğer yarısının küçük olması beklenir. Bu durumda n = 25 alınırsa; $A_1 = 4{,}47$, $A_2 = 11{,}257$,

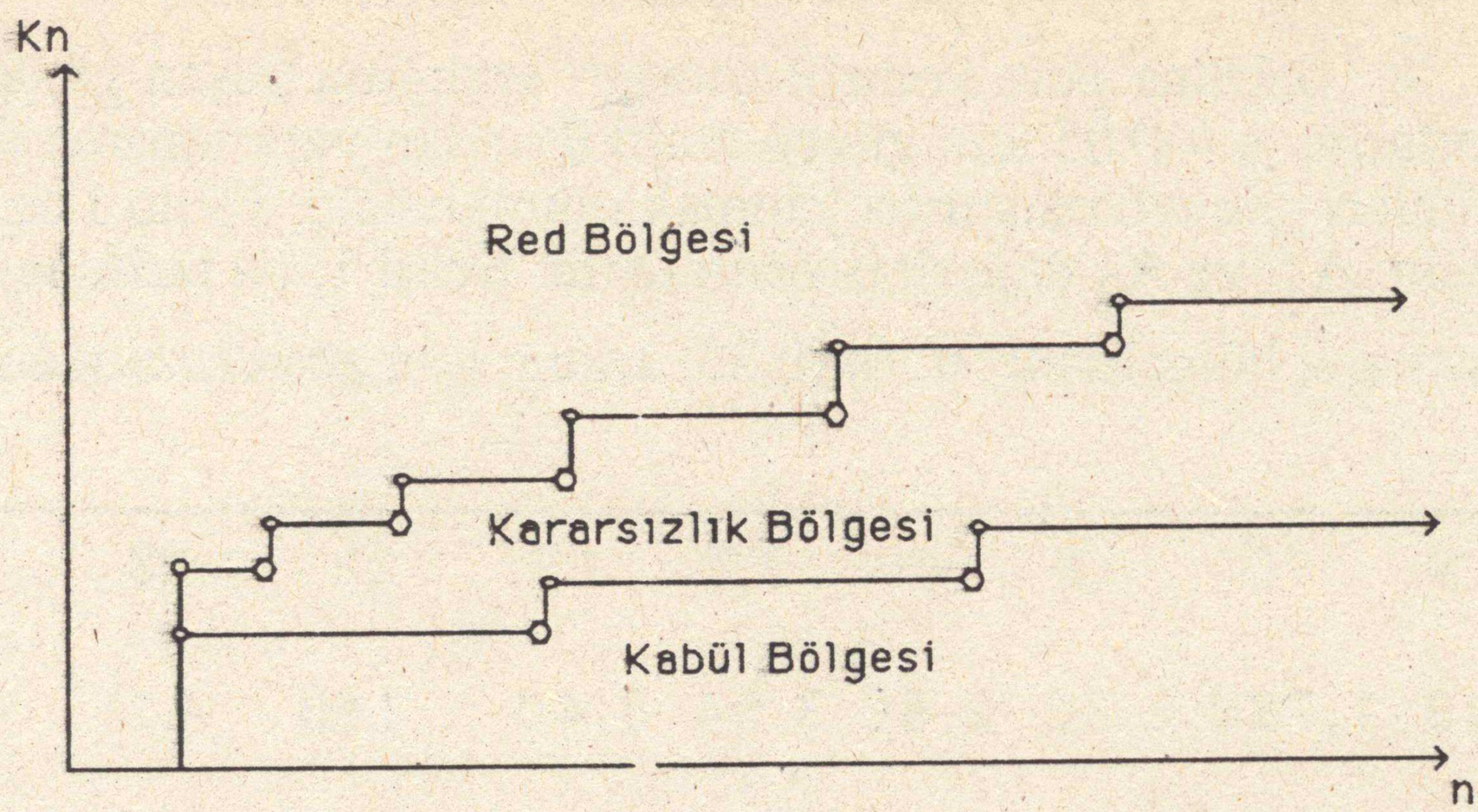
$B = -4.56$ ve $B_2 = -1$ ^57 olarak bulunur. Benzer olarak $\mp$ 3 s' lı Shewhart $\bar{x}$ kartına göre kontrol sınırları aralığına düşen gözlemlere atanan skorların, $a = 0.05$ için güven aralıklarından yararlanarak değişik örnek büyükleri için tablolaştırma yapmak mümkündür. Tablo 1'de bazı n değerleri için A_1 ve A_2 değerleri verilmişitir. Şekil 1, bu tarifede kabul, red ve kararsızlîk bölgelerini "n" in (0,25) aralığı için göstermektedir.

n	8	10	13	16	17	19	22	23	25
A_1	1,43	1,788	2,32	2,86	3,04	3,40	3,93	4,11	4,47
A_2	5,22	6,021	7,15	8,22	8,56	9,23	10,21	10,53	11,25

Tablo 1 Bazı n Değerleri için $a = 0.05$ seviyesinde A_1 ve A_2 Değerleri

Birleştirilmiş karar kuralına yapılan bu yaklaşım, örnek büyüklüğünün fonksiyonu olarak monoton değişen karar aralığı kuralına benzetilebilir. İki taraflı tarifeler için karar bölgeleri yatay eksene göre simetrik olacaktır. Kabul bölge sınırları süreç ortalamasının ve varyansının hedeflenen duruma eşi(duğunda beklenen kümülatif skorların örnek büyüklüğüne göre değişimini göstermektir. Gerçekleşen kümülatif skorların, beklenen değerlerden mutlak değerce büyük olması durumunda yeni durumun bir redde ne den olup olmayacağı red bölgeleri sınırları ile belirlenmeye çalışılmıştır. Bu nedenle kabul bölgesi sınırları ile red bölgesi sınırları arasında kalan bölgeler, süreç karakteristiklerinin değişip değişmediği konusunda istatistiksel bir bilgi vermeyen kararsızlık bölgeleri olarak ifade edilebilir.

Karar aralığı tarifelerinde KÜTOP değeri karar aralığını aştığında veya sıfıra geri döndüğü ; ıman red ve kabul kararları alınabilmektedir. Buna karşılık birleştirilmiş karar kuralında oluşturulan tarifelerde kümülatif skorların kabul bölgesine düşmesi ile, karar aralığının sıfıra dönmesi eşdeğer tutulmuştur.



Şekil 1 Birleştirilmiş Karar Kuralında $\alpha=0,05$ ve $\pm 3\,\sigma$ Shewhart $\bar{x}$ Kartı Kontrol Sınırlarına Göre Karar Bölgeleri

4. Kontrol Tarifelerinin Karşılaştırılıması

Birbirinden farklı iki tarifeyi karşılaştırmak için tarifelerin kabul edilebilir ve red edilebilir kalite seviyelerindeki ortalama işletme uzunlukları kullanılabilir (2). Karşılaştırması yapılacak tarifeler için grup ve örnek büyüklüklerinin sabit olması gereklidir. Kabul edilebilir kalite seviyesindeki ortalama işletme uzunluğununu (L_o) büyük, reddedilebilir kalite seviyesindeki ortalama işletme uzunluğunun (L_1) küçük olması arzulanır. Bu kısımda standart KÜTOP karar aralığı, birleştirilmiş KÜTOP ve Shewhart (3,2,2) kontrol tarifeleri karşılaştırılacaktır.

Karar aralığı kuralında h=5, k=0.5, T=0, S = 1 standart tarifesi için ortalama işletme uzunlukları nomogramların yardımı ile elde edilebilir. Nomogramların kullanışları oldukça basittir. Normal dağılışının ve karar aralığı kuralının parametreleri bilindiğinde nomogromdaki iki eksende elde edilen iki nokta bir cetvel ile birleştirilerek değişik durumlara ilişkin ortalama işletlme uzunlukları elde edilebilir. Burada kabul edilebilir kalite seviyesi (K.K.S.) hedeflenen değer ve reddedilebilir kalite seviyesi (R.K.S.) referans değerinin iki katı olarak alınabilir.

Birleştirilmiş KÜTOP tarifesinde a = 0.05 için ortalama işletme uzunlukları gözlemlerin tümünü ve yarısını ele alarak iki durum için elde edilmiştir. Tablo 2 ortalamadan ayrılışlara (Δ T) göre değişken karar

aralıklarının n/2, n ve 8n/9 için ortalama işletme uzunluklarının göstermektedir.

Ortalamadan ayrılışlar (Δ T) (standart sapma cinsinden)

	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
n/2	17,63	8,24	3,35	1,89	1,19	1,07
n	7109,05	19,83	6,43	2,50	1,33	1,07
	288,75	16,91	4,72	1,73	1,13	1,02

Tablo 2 Birleştirilmiş KÜTOP Tarifesinde Ortalama İşletme Uzunlukları(a = 0,05)

Shewhart (3,2,2) tarifesi için ortalama işletme uzunlukları BRENT (1974) ile tanmlanan standart normal değişken türetme alt programının kullanılmasıyla elde edilmiştir (4). Shewhart (3,2,2) tarifesi için ortalama işletme uzunluklarının elde edildiği proğram EK 2'de sunulmuştur.

Karşılaştırılması yapılacak olan her üç tarife için,

K.K.S. = 0

R.K.S. = 1

olarak alınmıştır. Tablo 3 üç tarifenin K.K.S. ve R.K.S. deki ortalama işletme uzunluklarını göstermektedir.

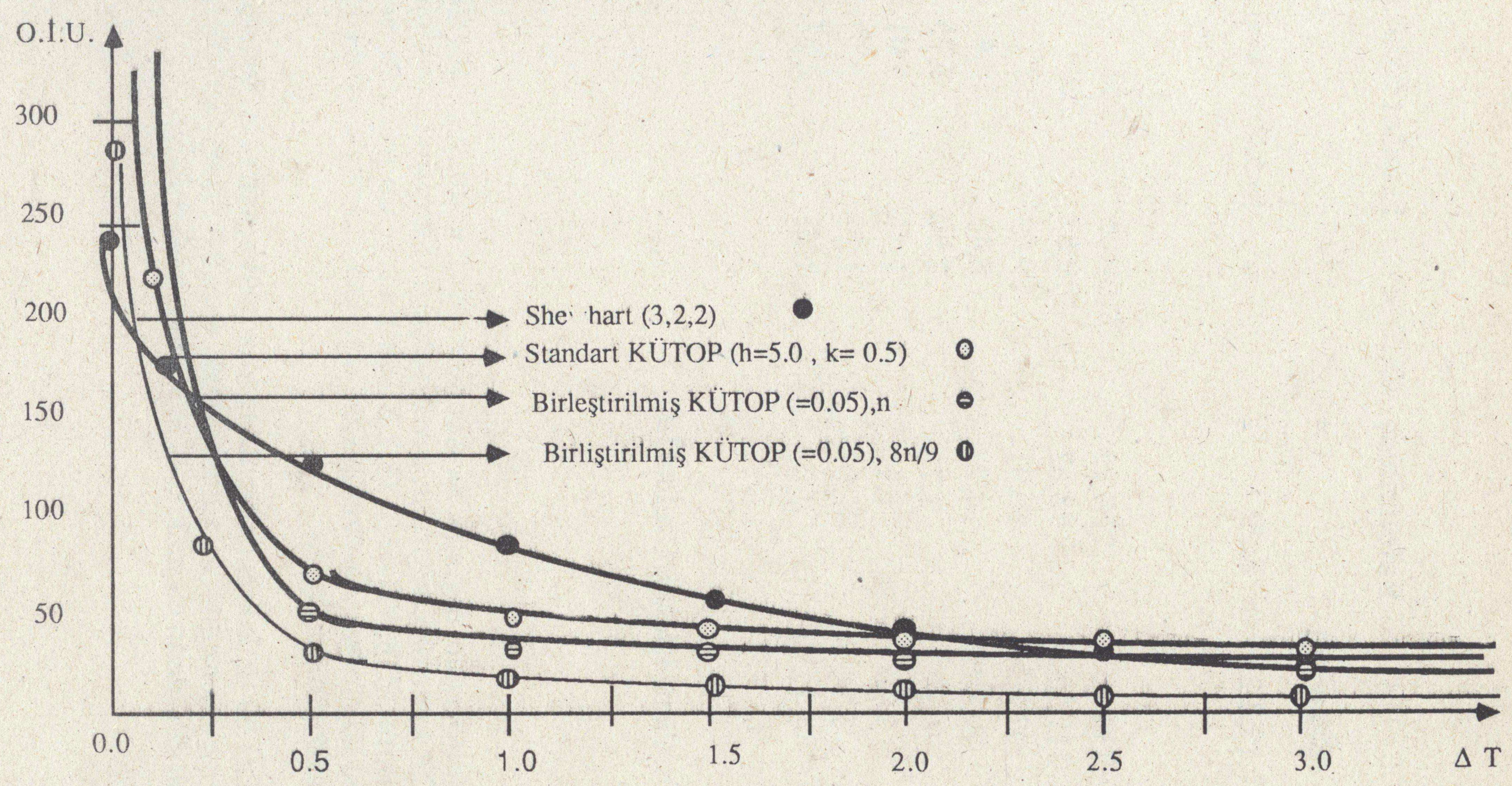
	Shewhart (3,2,2)	Birleştirilmiş KÜTOP		Standart KÜTOP
		8n/9	n	
K.K.S.	238,23	288,75	7109,05	931
R.K.S.	19,89	4,72	6,43	10,4

Tablo 3 Kontrol Tarifeleri Ortalama İşletme Uzunlukları

Tablo 3' den de görüleceği gibi kabul edilebilir kalite seviyesinde en büyük ortalama işletme uzunluğu birleştirilmiş KÜTOP tarifesinde n durumunda oluşmaktadır. Ayrıca bu tarifenin reddedilebilir kalite seviyesindeki ortalama işletme uzunluğu Shewhart (3,2,2) ve standart KÜTOP tarifelerine göre daha küçüktür.

Tablo farklı sapma seviyeleri için kontrol tarifelerinin ortalama işletme uzunluklarını ve şekil 2. bu tablodan yararlanılarak tarifelerin O.İ.U. eğrilerini göstermektedir.

Standart KÜTOP tarifesinin ortalama seviyesindeki küçük değişiklikleri Shewhart x tarifelerine göre daha çabuk ortaya çıkardığı bir çok yazar tarafından belirtilmiştir. Aynı yazarlar ortalama seviyesindeki büyük değişmelerin ortaya çıkarılmasında standart KÜTOP tarifesinin aynı etkiyi gösteremediğini belirtmektedirler. Ayrıca Tabo 4 'in incelenmesi ile de bu sonuca varılabilir. Birleştirilmiş KÜTOP tarifelerinin Tablo 4'de yer verilmiş olanları, süreç ortalamasının hedeflenen değere eşit olduğu zaman Shewhart 'a göre daha büyük ortalama işletme uzunluklarını ancak süreç ortalamasının 0 ,, 2 standart sapmalı durumundan itibaren Shewhart (3,2,2) ve standart KUTOP tarifelerenden ve daha küçük ortalama işletme uzunlukları vermektedir.



Şekil 2. Tarifelerin Ortalama İşletme Uzunluğu Eğrileri

Ortalama İşletme Uzunlukları

Sapma (s.s cinsinden)	Shewhart (3,2,2)	Birleştirilmiş KÜTOP (= 0,05 8n/9	n	Standart KÜTOP h=5,0	k=0,5
0,0	238,23	288,75	7109,05	931	
0,2	211,28	58,67	119,82	220	
0,5	92,81	16,91	19,83	38	
1,0	19,89	4,72	6,43	10,4	
1,5	6,85	1,73	2,50	5,75	
2,0	2,90	1,13	1,33	4,01	
2,5	1,78	1,03	1,23	3,11	
3,0	1,32	1,02	1,07	2,57	

Tablo 4 Ortalama İşletme Uzunlukları

SONUÇ

Kalite kontrolunun dışında da kendine özel uygulama alanları yaratmış KÜTOP kontrol kartlarının geniş yelpazesi içersinde, standart KÜTOP tarifesinin SHEWHART (3,2,2) tarifesiyle oluşturulan yeni Kütop tarifesi, bu iki tarifenin de özelliklerini taşıması nedeniyle daha etkin bir tarife olduğu görülebilmektedir.

Hiç şüphesiz bu tür kombinasyonların altarnatif sayısı çok büyüktür. Ancak birleştirme mantığından yararlanarak yeni KÜTOP tarifelerini oluşturmak ve bu tarifelerin etkinliklerini incelemek mümkündür.

A NEW CUSUM SCHEME FOR STATİSTİCAL QUALİTY CONTROL CHART

It is known that CUSUM control charts is more successful than SHEWHART control charts against to small deviations of process mean. Therefore CUSUM charts have founded special application areas. SHEWHART control charts is effective in the case of large deviations on process mean.

In this study, It is constructed a new CUSUM scheme by combining SHEWHART (3, 2, 2) and standart CUSUM scheme under assumption of normal distribution . Also these schemes are compared using by Average Run length's of these schemes.

KAYNAKÇA

1.EWAN, W.D., KEMP, K.W., "Sampling Inspection of Continious Processes with no Autocorrelation Between Successive Results" , **Biometrika**, 47, 1960.

2.KEMP, K.W., "The Use of Cumulative Sums for Sampling Inspection Schemes", **Applied Statictics**, March,1962

3.LUCAS, J.M., CROSIER, R.B., "Robust Cusum, A Robustness Study Cusum control Schemes" **Commun. Statist. Theory and Methodology,** 11,1982.

4.**NAG FORTRAN LIBRARY MANUAL**, Mark II, Vol.5, 1977

5.PAGE E.S., "Continious Inspection Schemes", **Biometrika** 41, 1954, s (100-115).

6.REYNOLDS M.R "Approximations to the Average Run Length in Cumulative Sum Control Charts" , **Technometrics**, 17,1975.

7.STOODLEY K D.C.,LEWIS T.S.C.L.S., "**Applied Statistical Techniques**, Great Britain,1980.

8.WOODWARD, R.H. , GOLDSMITH, P.L. , "**Cumulative Sum Techniques**" , Oliver and.Boyds Press, EDINBURGH, 1964.