D.E.Ü. İ.İ.B.F. Dergisi
Cilt: 10, Sayı: I, 1995, ss.95-118

SINIR İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN ZAYIF FORMÜLASYONU ÜZERİNE

Samim DÜNDAR(*) **Gonca ONARGAN(**)**

ÖZET

Bu çalışmada sınır değer problemlerinin yaklaşık sayısal çözümünü veren Sınır Elemanlar Yönteminde sınır integral denklemlerin elde edilmesinde Ağırlıklı Artıklar Yöntemi genel bir L diferansiyel operator için verilmiş ve sınır integral denklemler elde edilmiştir.

Sınır değer problemlerinin varyasyonel formülasyonu açıklanmış ve zayıf formülasyon genelleştirilmiş Green formülü ile problemin temel çözümüne göre ifade edilmiştir.

Sınır Elemanlar Yöntemi eğri sınırlara sahip düzlem potansiyel problemlerde Laplace operatörü için geliştirilmiştir. Yöntemin incelenmesinde yaklaşık çözümün düğüm noktalarındaki sayısal değerlerin sabit, doğrusal ve kuadratik sınır elemanlar kullanılarak nasıl bulunduğu açıklanmış, sayısal uygulama ise kuadratik sınır elemanlar kullanılarak elde edilen sonuçlar tam sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

1. GİRİŞ

Günümüzde uygulamalı bilim ve teknolojik alanlarda ortaya çıkan gelişme bilim dalları arasındaki yaklaşımı etkilemektedir. Be nedenle ortaya çıkan fen ve mühendisliğin çeşitli problemlerinin matematik modelleri genellikle adi ve kısmi diferansiyel denklem veya denklemler sistemleridir. Kurulan matematik model ile verilen fizik sistemin uyuşması problemde verilen bazı ilave koşullar (sınır koşulları) ile sağlanır. Bu koşullar ile diferansiyel denklem bir sınır değer problemi teşkil eder.

Analitik çözümü bulunmayan veya analitik çözümün bulunması zor olan sınır değer problemleri için çeşitli sayısal ve yaklaşık yöntemler geliştirilmiştir. Sonlu farklar, belirsiz parametreler, sonlu elemanlar yöntemler sınır değer problemlerinin sayısal ve yaklaşık çözümlerini veren yöntemlerdir.

Bu çalışmada doğrusal, homojen kısmi türevli diferansiyel denklemle verilen sınır değer probleminin zayıf formülasyonu Ağırlıklı Artıklar Yöntemi ile elde edilmiştir. Bu zayıf formülasyonda problemin diferansiyel denklemi sınırda tanımlı bir integral denkleme indirgenmiş, Sınır Elemanlar Yöntemi uygulanarak problemin yaklaşık çözümü elde edilmiştir.

(*) Öğr.Gör.Dr., D.E.Ü.İ.İ.B.F., Ekonometri Bölümü
(**) Prof.Dr. D.E.Ü. F.E.F Matematik Bölümü

2. SINIR DEĞER PROBLEMİ ve KENDİNE EK SINIR DEĞER PROBLEMİ

Elemanları $\underset{\sim}{x}^T = (x_1 , x_2 , ...,x_n)$ ile gösterilen IR^n uzayının basit bağımlı R bölgesinde, $\underset{\sim}{x}$ bağımsız değişkenlerinin L türev operatörü ve bilinen bir $b(\underset{\sim}{x})$ fonksiyonu verildiğinde

$$L [u (x)] = b (\underset{\sim}{x}) , x \in R \qquad (2.1)$$

diferansiyel denklemi ile beraber $u (x)$ bilinmeyen fonksiyonuna R bölgesinin $F = \partial R$ sınırında F_i operatörleri uygulandığında

$$F_i [u (\underset{\sim}{x})] = f_i (\underset{\sim}{x}) , \underset{\sim}{x} \in F \qquad (2.2)$$

denklemleri bir sınır değer problemi tanımlar. (2.1) denklemine sınır değer probleminin diferansiyel denklemi, (2.2) denklemine sınır değer probleminin sınır koşulları denir.

(2.1) ve (2.2) denklemleri ile tanımlanan sınır değer probleminde L ve F_i operatörleri doğrusal ve $b (x)$ ile $f_i (x)$ $(i = 1,2,....,k)$ fonksiyonlarından en az birisi sıfırdan farklı ise problem homojen olmayan doğrusal sınır değer problemidir.

Uygulamada karşılaşılan sınır değer problemlerinde (2.1) denklemindeki L [ ] türev operatör genellikle kendi ek operatörü olarak bulunur. Bu nedenle (2.1) diferansiyel denkleminin sol yanı R çözüm bölgesinde yeterince düzgün V fonksiyonu ile çarpılıp türev işlemleri v fonksiyonuna geçirilirse

$$(L [u]) v \rightarrow (L^* [v]) u + ... \qquad (2.3)$$

ifadesi elde edilir. (2.3) de sol yan L [u] ile v fonksiyonunun

$$(L [u] , v) = \int_R (L [u]) dR \qquad (2.4)$$

iç çarpımıdır. L^* L operatörünün ekidir. (2.3) de bütün türev işlemleri v fonksiyonuna geçinceye kadar kısımlara ayırma uygulanırsa Lagrange özdeşliği

$$(L [u] , v) = (u , L^* [v]) + (P [u,v] , 1)_F \qquad (2.5)$$

elde edilir. (2.5) de $(P [u,v] , 1)_F$ sınır terimi ikili katkı terimidir.

Doğrusal bir sınır değer probleminin R çözüm bölgesinde yeteri kadar düzgün ve Fi [u] = Fi [v] = 0 (i = 1,2,....,k) homojen sınır koşullarını sağlayan herhangi iki u ve v fonksiyonu için

$$\int_R L [u] v \, dR = \int_R u L [v] \, dR \qquad (2.6)$$

koşulu sağlanıyor ise sınır değer problemine kendine ek sınır değer problemi denir.

2.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ GREEN FORMÜLÜ

(2.1) ve (2.2) denklemleri ile verilen sınır değer probleminde L kısmi türev operatörü ise P [u ,v] ikili katkı terimi integral alma sonucu elde edilen $\underset{\sim}{F}[u]$, $\underset{\sim}{F}^*[v]$, $\underset{\sim}{G}[u]$, $\underset{\sim}{G}^*[v]$ (vektör) sınır türev operatörler cinsinden

$$(P[u,v])_F = \left(\underset{\sim}{F}^*[v], \underset{\sim}{G}[u]\right)_F - \left(\underset{\sim}{F}[u], \underset{\sim}{G}^*[v]\right)_F$$

ile verilir ve genelleştirilmiş Green Formülü

$$(L[u], v) - (u, L^*[v]) = \left(F^*[v], \underset{\sim}{G}[u]\right)_F - \left(\underset{\sim}{F}[u], \underset{\sim}{G}^*[v]\right)_F \qquad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır, L kendine ek operatör için $L = L^*$ ve $F = F^*$, $G = G^*$ olur.

(2.2) denklemi ile verilen sınır koşullarında u(x) çözüm fonksiyonunu ve L türev operatörünün mertebesinin yarısının bir eksiği mertebeden ya da daha az mertebeden türevleri içeren sınır koşulları (2.7) genelleştirilmiş Green formülünde

$$\underset{\sim}{F}(u) = \underset{\sim}{f}$$

esas (geometrik) sınır koşulları, esas sınır koşulları dışında kalan sınır koşulları da

$$\underset{\sim}{G}(u) = \underset{\sim}{g}$$

doğal (natural) sınır koşulları olarak ortaya çıkar.

2.2. Sınır Değer Probleminin Varyasyonel (Zayıf) Formülâsyonu

Uygulamalı problemlerde (2.1) ve (2.2) denklemleri ile verilen sınır değer probleminin klâsik çözümünün [diferansiyel denklemin mertebesi kadar türetilebilen ve sınır koşullarını sağlayan çözüm] elde edilmesi yerine klâsik çözüm üzerindeki koşulların zayıflatılmasıyla (2.1) denkleminin

$$(L[u], v) = (b,v) \qquad (2.8)$$

varyasyonel (zayıf) formunun sağlayan çözümlerin (zayıf çözümlerin) bulunması amaçlanır.

(2.1) ve (2.2) sınır değer probleminin varyasyonel formülasyonu u ($\underset{\sim}{x}$) çözüm fonksiyonunun (2.1) diferansiyel denklemi ve (2.2) sınır koşullarını ağırlıklı artıklar anlamında sağlamasıdır. O halde

$$L[u(\underset{\sim}{x})] + b(\underset{\sim}{x}) = 0 \qquad \underset{\sim}{x} \in R \tag{2.9}$$

diferansiyel denklemi ve

$$F[u(\underset{\sim}{x})] + f(\underset{\sim}{x}) \qquad \underset{\sim}{x} \in F_1 \quad \text{(Esas sınır koşulu)} \tag{2.10a}$$

$$G[u(\underset{\sim}{x})] + g(\underset{\sim}{x}) \qquad \underset{\sim}{x} \in F_2 \quad \text{(Doğal sınır koşulu)} \tag{2.10b}$$

sınır koşulları ile verilen sınır değer probleminin zayıf çözümü (2.9) denkleminin her iki tarafı deneme (test) fonksiyonu denilen yeterince düzgün ve (2.10a), (2.10b) sınır koşullarını sağlayan $v(\underset{\sim}{x})$ fonksiyonu ile çarpılıp R çözüm bölgesinde $u(\underset{\sim}{x})$ ve $u(x)$ fonksiyonlarının türevleri dengeleninceye kadar kısımlara ayırma uygulanarak u ve v fonksiyonlarının $\underset{\sim}{D}[u]$, $\underset{\sim}{D}[v]$ türevlerine göre

$$\int_R (L[u] + b)\, v\, dR = \int_F \underset{\sim}{F}[v]\, \underset{\sim}{G}[u]\, dF + \int_R (bv + \underset{\sim}{D}[u]\, \underset{\sim}{D}[v])\, dR$$

şeklinde veya

$$(L[u] + b, v)_R = (\underset{\sim}{F}[v], \underset{\sim}{G}[u])_F + (b, v)_R + (\underset{\sim}{D}[u], \underset{\sim}{D}[v])_R \tag{2.11}$$

şeklinde elde edilir.

2.3. Sınır Değer Probleminin Ağırlıklı Yöntemleri (Varyasyonel Yaklaşım Yöntemleri) ile Yaklaşık Çözümü

Ağırlıklı Artıklar yönteminde (2.9), (2.10) sınır değer probleminin R çözüm bölgesi ve $\partial R = F$ sınırında tanımlı, sürekli, tam (complete) olan bilinen doğrusal bağımsız $N_i(\underset{\sim}{x})$ (i=1,....k) koordinat fonksiyonlarının ağırlıklı toplamı

$$u(\underset{\sim}{x}) - \sum_{i=1}^{k} \delta_i N_i(\underset{\sim}{x}) \tag{2.12}$$

Çözüm olarak kabul edilir. Bu çözüme deneme çözümü, bilinmeyen ağırlıklara δ_i (i=1,...,k) belirsiz parametreler denir.Belirsiz parametrelere deneme çözümünü gerçek çözüme en iyi yaklaştıracak şekilde belirlenir.

(2.9) ve (2.10) denklemleri ile verilen kendine ek sınır değer proble-

minde, (2.9) diferansiyel denklemi R çözüm bölgesinde tam olarak sağlayan, (2b10a) ve (2.10b) sınır koşulların ise yaklaşık olarak sağlayan u (x) deneme fonksiyonlarıyla yaklaşık yapılarak çözümün elde edilmesi sınır Ełemanları Yönteminin esasını oluşturur. (2.12) denklemi ile tanımlanan deneme çözümü (2.10a) ve (2.10b) sınır koşullarını yaklaşık olarak sağladığı için (2.10a) ve (2.10b) sınır koşullarında sınır artıkları (rezidüler)

$$\underset{\sim 1}{\varepsilon} = \underset{\sim}{F}[u] - \underset{\sim}{f} \neq \underset{\sim}{o} \qquad \underset{\sim}{x} \in F_1 \tag{2.13a}$$

$$\underset{\sim 2}{\varepsilon} = \underset{\sim}{G}[u] - \underset{\sim}{g} \neq \underset{\sim}{o} \qquad \underset{\sim}{x} \in F_2 \tag{2.13b}$$

olur, u (x) yaklaşık çözümler için bu artıkların en küçük olması istenir. Bunun için

$$\int_R \omega_1 (\underset{\sim}{x})\, dR \neq 0 \qquad (i=1,2,\ldots k)$$

şeklinde ω_i (x) ağırlık fonksiyonları seçilerek

$$\int_R = (L[u] + b)\, \omega_i (\underset{\sim}{x})\, dR = \int_R \varepsilon_1 \omega_i (\underset{\sim}{x})\, dR = 0 \qquad (i=1,2,\ldots k) \tag{2.14}$$

yazılabilir. (2.9), (2.10) sınır değer probleminin R bölgesi ve F sınırında ε_R, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ artıklarının $\underset{\sim}{\omega}, \underset{\sim}{\omega}_1, \underset{\sim}{\omega}_2$ ağırlık fonksiyonları ile ağırlıklandırılmış varyasyonel ifadesi

$$\int_R \varepsilon_R\, \omega(\underset{\sim}{x})\, dR + \int_{F_1} \underset{\sim 1}{\varepsilon}\, \omega_1 (\underset{\sim}{x})\, dF + \int_{F_2} \underset{\sim 2}{\varepsilon}\, \omega_2 (\underset{\sim}{x})\, dF = 0 \tag{2.15}$$

dir. $\underset{\sim}{\omega}, \underset{\sim}{\omega}_1, \underset{\sim}{\omega}_2$ ağırlık fonksiyonlarının

$$\underset{\sim}{\omega} = \delta u \tag{2.16a}$$

$$\underset{\sim}{\omega}_1 = \underset{\sim}{G}(\underset{\sim}{\omega}) = \underset{\sim}{G}(\delta \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x})) \tag{2.16b}$$

$$\underset{\sim}{\omega}_2 = -\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{\omega}) = -\underset{\sim}{F}(\delta \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x})) \tag{2.16c}$$

seçimi ile (2.15) ağırlıklı ifadesi kendine ek L türev operatör için

$$\int_R (L[u] + b)\, \omega\, dR + \int_{F_1} (\underset{\sim}{F}[u] - f)\ \underset{\sim}{G}(\omega)\, dF + \int_{F_2} (g - \underset{\sim}{G}[u].\ \underset{\sim}{F}(\omega)\, dF = 0 \tag{2.17}$$

şeklinde elde edilir.

Bu çalışmada (2.9), (2.10) sınır değer probleminde kendine ek L türev operatörü Laplace operatörü olarak seçilmiş, deneme (yaklaşık) çözümün R bölgesinde ve $\partial R = F$ sınırında oluşturduğu $\varepsilon_1 = \Delta u + b$, $\varepsilon_1 = u - \bar{u}$, $\varepsilon_2 = q - \bar{q}$ artıklar ile sınır değer probleminin çözümü

$$\dot{E}_R = (\Delta u + b)\,\omega\, dR + \dot{E}_{F_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial \omega}{\partial n} dR + \dot{E}_{F_2} (q - \bar{q})\,\omega\, dF = 0 \qquad (2.18)$$

sınır integral denklemin çözümüne (varyasyonel probleme) dönüştürülmüştür. (2.18) denkleminde u çözümünün normal türevi $q \frac{\partial u}{\partial n}$ ile tanımlanır, F_1 sınır parçası üzerinde verilen (2.10a) esas sınır koşulu ve F_2 sınır parçası üzerinde verilen (2.10b) doğal sınır koşulu

$$\underset{\sim}{F}(u) = u,\ \underset{\sim}{f} = \bar{u} \text{ (Dirichlet sınır koşulu) } \underset{\sim}{x} \in F_1 \qquad (2.19a)$$

$$\underset{\sim}{G}(u) = q,\ \underset{\sim}{q} = \bar{q} \text{ (Neumann sınır koşulu) } \underset{\sim}{x} \in F_2 \qquad (2.19b)$$

olur. (2.18) denklemine (2.7) denklemi ile tanımlanan

$$\dot{E}_R = (u\Delta\omega - \omega\Delta u)\, dR = \dot{E}_R \left(u \frac{\partial u}{\partial n} - \omega \frac{\partial u}{\partial n} \right) dR \qquad (2.20)$$

Green formülü uygulanırsa sınır integral denklem

$$\dot{E}_R\, b\omega\, dR + \dot{E}_{F_1}\, \omega q\, dF - \dot{E}_{F_2}\, u \frac{\partial \omega}{\partial n}\, dF = 0 \qquad (2.21)$$

olur.

2.4. Potansiyel Problemler İçin Sınır İntegral Denklemler (Sınır Elemanlar Yöntemi)

Sürekli Mekanikteki nümerik inceleme yöntemlerine alternatif bir teknik olarak geliştirilen Sınır Yönteminin en önemli uygulama alanı akışkan, ısı dağılımı, elektrostatik gibi potansiyel teori problemleridir. Bu tip problemlerin diferansiyel denklemi Laplace denklemi veya Poisson denklemidir, çözüm potansiyelin fonksiyonu olarak elde edilir.

Sınır Elemanlar Yönteminde (2.9) ile verilen kısmi diferansiyel denklem (2.20) Green özdeşliği kullanılarak $\Delta\,\omega\,(x) = 0$ Laplace denklemini sağlayan $\omega\,(\underset{\sim}{x})$ temel çözüme göre tek tabaka ve çift tabaka potansiyellerin süperpozisyonu olarak yalnız (2.19a) ve (2.19b) sınır değerlere göre bir

Fredholm integral denkleme dönüştürülür. Bu dönüşüm problemin boyutunu bir indirger, daha sonra bu integral denklem nümerik olarak çözülür.

Bu çalışmada R bölgesinde

$$\Delta u\ (\underset{\sim}{x}) = 0\ ,\ \underset{\sim}{x} \in R \qquad (2.22)$$

Laplace denklemlerini sağlayan, bölgenin F_1 sınırında

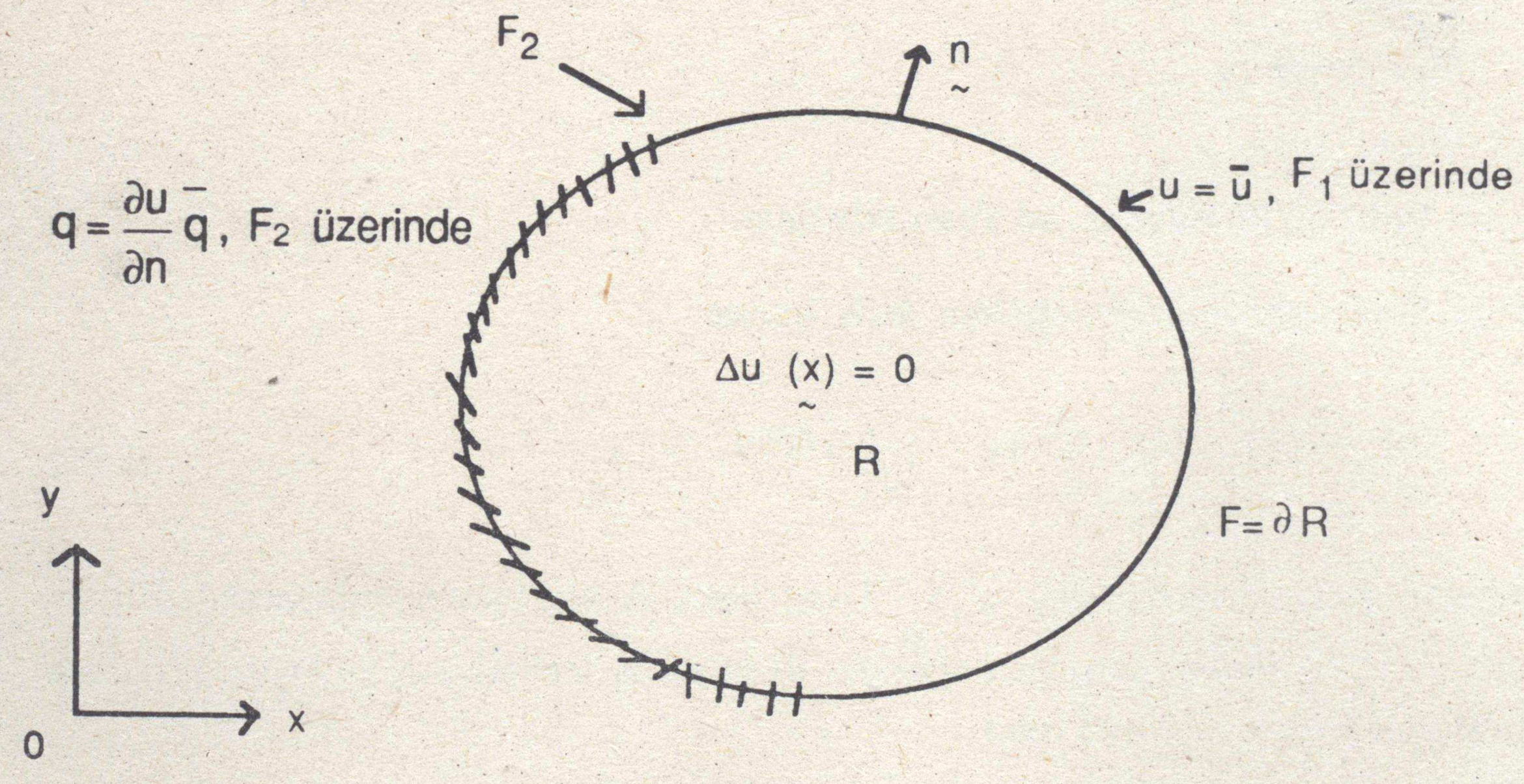
$$u\ (\underset{\sim}{x}) = \bar{u}\ (\underset{\sim}{x})\ ,\ \underset{\sim}{x} \in F_1 \qquad (2.23a)$$

Laplace denklemlerini sağlayan, bölgenin F_2 sınırında

$$q\ (\underset{\sim}{x}) = \frac{\partial u\ (\underset{\sim}{x})}{\partial n} = \bar{q}\ (\underset{\sim}{x})\ ,\ \underset{\sim}{x} \in F_2 \qquad (2.23b)$$

Neumann sınır koşulları ile verilen (2.1) sınır değer probleminin $u(\underset{\sim}{x})$ yaklaşık çözümü Sınır Elemanları Yöntemi ile araştırılmıştır.

Burada $\bar{u}\ (\underset{\sim}{x})$ F_1 sınırı üzerinde u(x) çözüm fonksiyonunun verilen değerini $\dfrac{\partial u\ (\underset{\sim}{x})}{\partial n} = \bar{q}\ (\underset{\sim}{x})$ ise F_2 sınırı üzerinde $u\ (\underset{\sim}{x})$ çözüm fonksiyonunun normal türevinin verilen değerlerini gösterir, şekil (2.1). $\bar{u}\ (x)$ ve $\bar{q}\ (x)$ sınır koşullarını sınırın her noktasında sağlatmak yerine sadece sınırdaki düğüm noktalarında sağlatılır.



Şekil (2.1) Sınır İntegral Denklem Yöntemi İçin Gösterelim

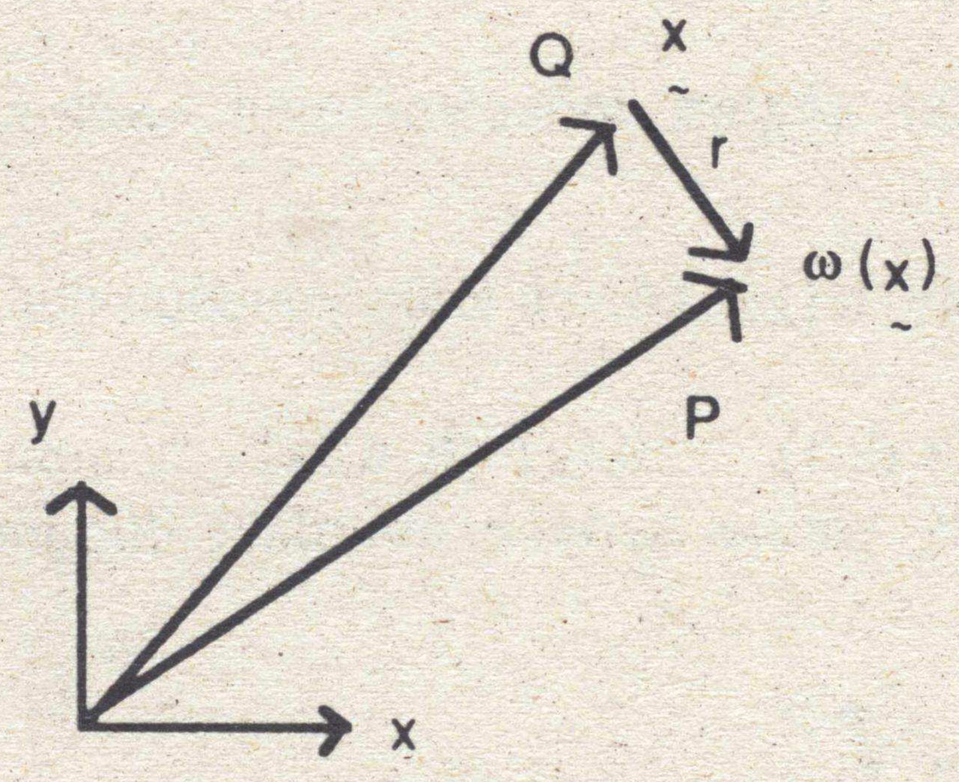
ω ağırlık fonksiyonu sonsuz bölgede verilen bir P noktasında birim potansiyele sahip δ Dirac-delta fonksiyonu uygulandığında

$$\Delta\omega(\underset{\sim}{x}) = -\,\delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim p}{x}) \tag{2.24}$$

denkleminin çözümleri olarak tanımlanırsa, Temel çözüm veya Serbest Uzay Gren Fonksiyonu denir. δ Dirac fonksiyonun tekil olduğu $\underset{\sim p}{x}$ noktasına kaynak noktası, x noktasına da gözlem noktası denir, Şekil (2.2) . $U(x)$ temel çözüm, $\underset{\sim p}{x}$ kaynak ve $\underset{\sim}{x}$ gözlem noktaları arasındaki Euclidean uzaklığın fonksiyonu olarak iki boyutlu problemler için

$$\omega(\underset{\sim}{x}) = -\,\ln r = -\,\ln\left|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim p}{x}\right| \tag{2.25}$$

dır.



$$\left|\underset{\sim}{r}\right| = r = \left|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim p}{x}\right| = |P - Q|$$

Şekil (2.2) Kaynak ve Alan Noktaları

$\omega(\underset{\sim}{x})$ temel çözümünün ağırlıklı artık ifadesi

$$\int_R (\Delta\omega)\, u\, dR = -\int_R \delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim p}{x})\, u\, dR = -\,u(\underset{\sim p}{x}) \tag{2.26}$$

şeklinde elde edilir. Burada $u(\underset{\sim p}{x})$ Dirac-delta fonksiyonuna uygulandığı P noktasında $u(x)$ fonksiyonunun değeridir. O halde ω fonksiyonu $\Delta u(\underset{\sim}{x}) = 0$ Laplace denkleminin tekil çözümü olan

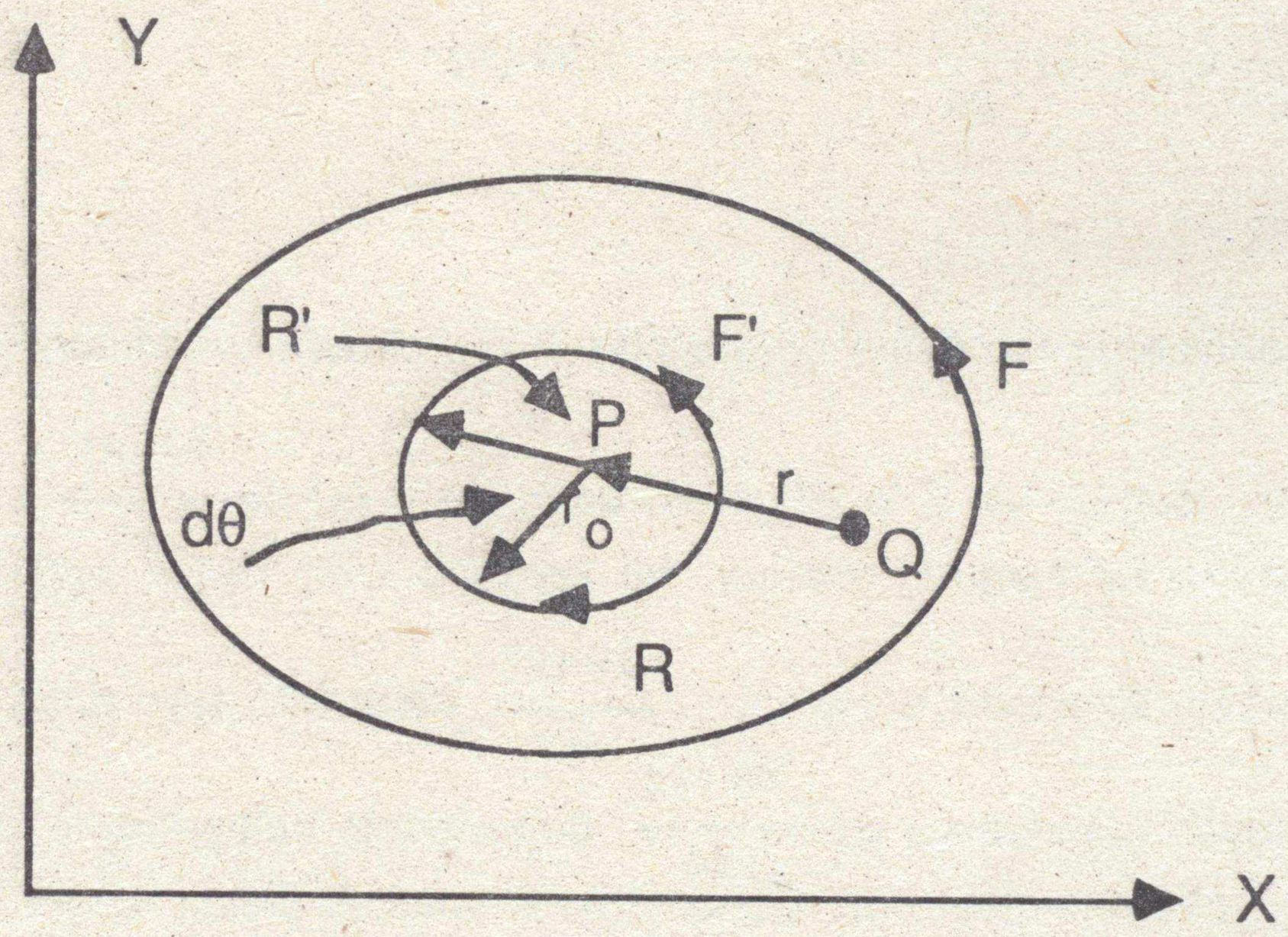
$$\omega = \ln r$$

fonksiyonudur.

Sınır Elemanları Yönteminin çıkarılmasında kullanılan Green Formülü r uzaklığının sıfır olduğu P = Q tekil noktada geçerli değildir. Bu durumda potansiyelin uygulandığı, P tekil nokta merkezli r_o yarıçaplı F' = ∂R' sınırlı R' dairesi R bölgesinden çıkarılır, Şekil (2.3). Yeni R/R' bölgede Green formülü uygulanabilir. u (x) ve ω (x) için aynı fonksiyonlar seçilirse Δu = 0, Δω =0 olur. Green formülü sınır elemanları yönteminde FUF' yeni sınırlar boyunca

$$\int_{FUF} \left[u(\underset{\sim}{x}) \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u(\underset{\sim}{x})}{\partial n} \right] dF(x) = 0 \qquad (2.27)$$

şeklinde elde edilir. Burada dF(x), $\underset{\sim}{x} \in$ F noktasındaki yay uzunluğunu gösterir.



Şekil (2.3) P noktasının R bölgesi içinde olması durumunda Green teoreminin uygulandığı bölge.

(2.7) denklemi, dF(x) = dS (x) = rdθ yay uzunluğu kullanılırsa

$$\int_{F} \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(u \frac{\partial \ln r_o}{\partial n} - \ln r_o \frac{\partial u}{\partial n} \right) r_o \, d\theta = 0 \qquad (2.28)$$

şeklinde yazılabilir. Burada θ, F sınırı boyunca integral saat hareketi yönünde alındığında saat hareketinin ters yönünde artan açıdır.

F' = ∂ R' sınırı üzerinde $r_o \rightarrow$ 0 için limit durum incelenirse

$$\lim_{r_o \to 0} r_o \ln r_o = 0 \quad \text{ve} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} r_o \ln r \, d\theta(x) = 0 \qquad (2.29a, b)$$

olur.

Bu durumda Gauss teoremi ile (2.28) denkleminin ikinci terimi

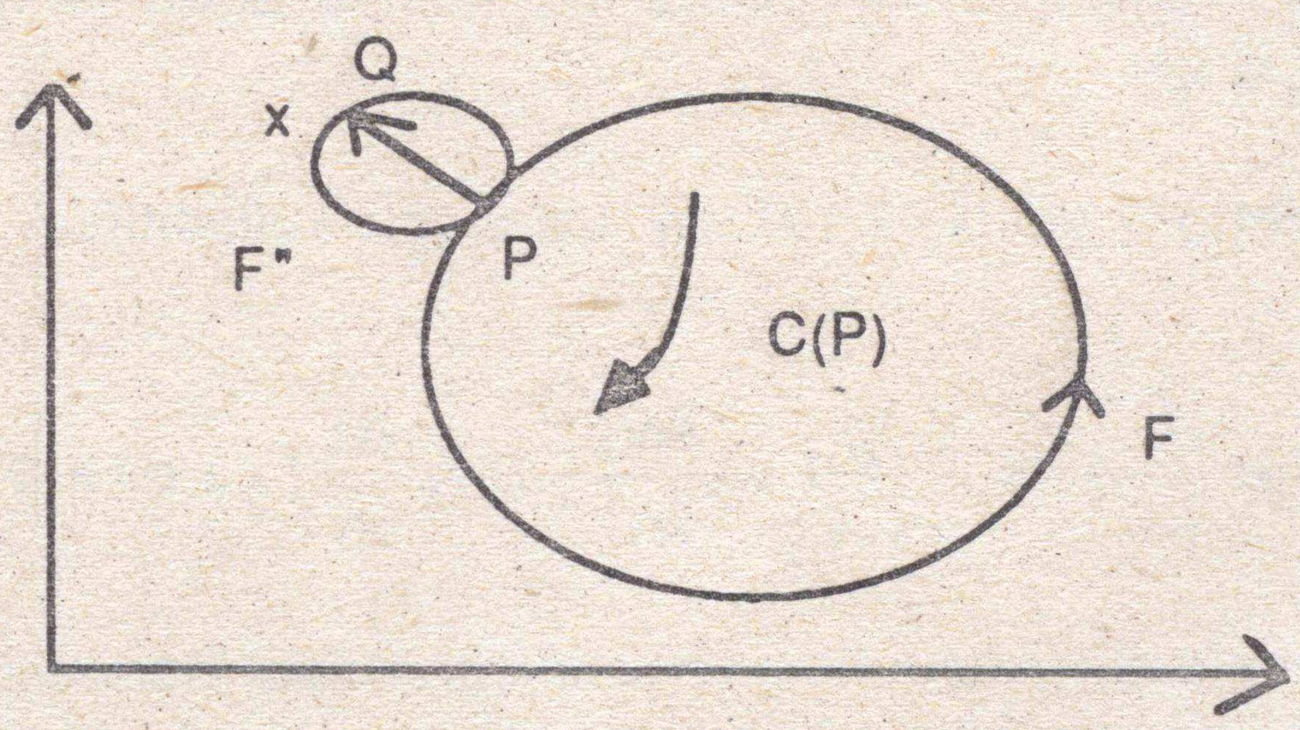
$$\int_{\theta=0}^{2\pi} u(x) \frac{\partial \ln r_o}{\partial n} r_o \, d\theta(x) = -2\pi . u(P) \qquad (2.30)$$

şeklinde yazılabilir. (2.28) denkleminde ikinci terim yerine (2.30) denklemindeki $-2\pi \, . \, u(P)$ ifadesi yazılıp denklem düzenlenirse sınır integral denklem

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_F \left[u(x) \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right] ds(x) \qquad (2.31)$$

olarak yazılabilir.

(2.31) denklemi, R çözüm bölgesinde P iç noktada u harmonik fonksiyonun bilinmeyen değeri ile $F = \partial R$ sınırı üzerinde $u(x)$ ve $\frac{\partial u(x)}{\partial n}$ bilinen değerler arasında bir bağıntı gösterir. İyi konmuş sınır değer problemlerinde aynı sınır parçası üzerinde $u(x)$ ve $\frac{\partial u(x)}{\partial n}$ değerleri aynı anda bilinmez. Sınırda bilinmeyen (ya $u(x)$ ya da $\frac{\partial u(x)}{\partial n}$ değerlerinin bulunması sınır elemanlar yönteminin esasını oluşturur. Bunun için P kaynak nokta sınıra taşınır, P noktası etrafında sınırın yeter derecede düzgün olduğu varsayılarak bir yarım çember çizilir. Bu durumda P noktası yeni değiştirilmiş sınırlar için bir iç nokta olur, x koordinatlı nokta Q gözlem noktasıdır, Şekil (2.4).



Şekil (2.4) P noktasının $F=\partial R$ sınırı üzerinde olması durumunda Green teoreminin uygulandığı bölge

(2.31) iç nokta formülasyonu

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[u(x) \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right] ds(x) \qquad (2.32)$$

denklemi şeklinde yazılabilir. $ds(x) = r d\theta$ yay uzunluğu kullanarak

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\Gamma} \left[u(Q) \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u(Q)}{\partial n} \right] ds(Q) \right.$$

$$\left. \int_{\Gamma} \left[u(Q) \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u(Q)}{\partial n} \right] r d\theta(x) \right\} \qquad (2.33)$$

elde edilir. $\Gamma'' = \partial R''$ sınırı $r_o \rightarrow 0$ için limit durum incelenir (2.29 a,b) denklemleri kullanılırsa

$$\int_{0}^{2\pi} u(Q) \frac{\partial \ln r_o}{\partial n}(P,Q) . r_o(P,Q)\, d\theta(x) = [2\pi - C(P)]\, u(P) \qquad (2.34)$$

olur. Burada $C(P)$ P sınır noktasındaki iç açıdır, Şekil (2 , 4). $u(x)$ değerinin düzgün dağılımı varsayımı ile

$$C(P) \int_{\Gamma} \frac{\partial \ln r(P,Q)}{\partial n} ds(Q) \qquad (2.35)$$

$u(x)$ çözüm fonksiyonunun P sınır düğüm noktalarındaki değerleri arasında bir bağlantı olan

$$u(P) = \frac{1}{C(P)} \int_{\Gamma} \left[u(Q) \frac{\partial \ln r(P,Q)}{\partial n} - \ln r(P,Q) \frac{\partial u(Q)}{\partial n} \right] ds(Q) \qquad (2.36)$$

sınır ifadesi elde edilir.

Sınır elemanları yönteminin uygulanmasında (2.37) sınır denklemi ile sınır üzerindeki bilinmeyenler belirlenir, daha sonra bulunan değerler (2.31) denkleminde yerine konularak bu sınır değerlere göre ifade integraller hesaplandığında $u(x)$ çözüm fonksiyonunun herhangi bir iç noktadaki yaklaşık sayısal değeri elde edilir.

2.5. Sınır İntegral Denklemlerin Matris Gösterilişi

Sınır integral denklemlerin tam çözümlerini elde etmek genel olarak mümkün değildir. Bu nedenle çözümler sayısal tekniklerle elde edilir. (2.36) sınır integral denklemin sınır elemanlar yöntemi ile çözümünde $F = \partial R$ sınırı M sayıda F_j sınır parçalarının toplamı olarak

$$F = \sum_{j=1}^{M} F_j \qquad (2.37)$$

şeklinde yazılır ve (2.36) denklemi ile verilen sınır ifadesi

$$-u(P).\,C(P) + \sum_{j=1}^{M} \int_{F_j} \left[u(Q) \frac{\partial \ln r(P,Q)}{\partial n} - \ln(P,Q) \frac{\partial u(Q)}{\partial n} \right] ds(Q) = 0 \qquad (2.38)$$

şeklinde M sayıda sınır parçası üzerinde integrallerin toplamı olarak ifade edilir. (2.38) denklemindeki integraller kullanılan eleman tipine göre (sabit, doğrusal, kuadratik, kübik sınır elemanlar) doğrusal dönüşüm ile lokal koordinatlara dönüştürülüp Gauss kuadratür formülü kullanılarak hesaplanır.

Sabit Sınır Elemanları Yaklaşımı

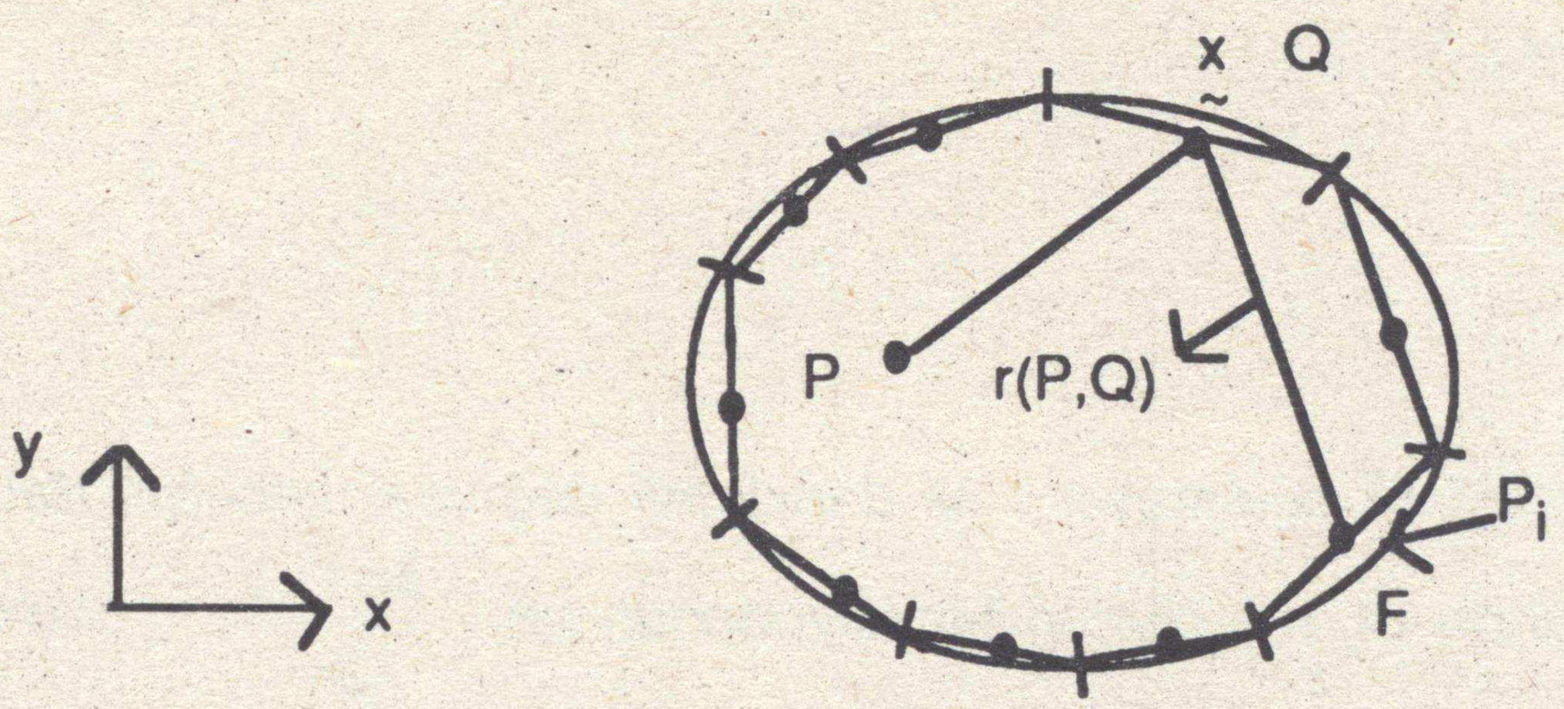
Sabit sınır elemanları yaklaşımında (2.37) denklemi ile verilen sınır parçaları üzerinde $u(\underset{\sim}{x})$ çözüm fonksiyonu ve $\dfrac{\partial u(x)}{\partial n}$ normal türevi $F_j =$ $(j=1,2,\ldots,M)$ sınır elemanın orta düğüm noktasındaki

$$u(x) = u_j(\underset{-}{x}),\quad \frac{\partial u}{\partial n}(\underset{-}{x}) = \frac{\partial u_j}{\partial n}(\underset{-}{x}) \qquad (2.39\ a,b)$$

Sabit değerler olarak alınır (parçalı sabit fonksiyon yaklaşımı) Bu durumda (2.38) denklemi $(i=1,2,\ldots,M)$ için

$$-u(P_i).\,c(P_i) + \sum_{j=1}^{M} \left[u_j \int_{F_j} \frac{\partial \ln r(P_i,Q)}{\partial n} - \frac{\partial u_j}{\partial n} \int_{F_j} \ln r(P_i,Q) \right] ds(Q) = 0 \qquad (2.40)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil (2.5) Sabit Sınır Elemanlar

H ve G

$H = [h_{ij}]$ ve $G = [g_{ij}]$ şeklinde tanımlanan matrisler olsun. G matrisi Green fonksiyonunun (yani tekil çözümün) H matrisi de Green fonksiyonunun normal türevinin integralleri ile;

$$h_{ij} = \int_{F_j} \frac{\partial \ln r(P_i, Q)}{\partial n} ds(Q) - \delta_{ij} \sum_{k=1}^{M} \int_{F_k} \frac{\partial \ln r(P_i, Q)}{\partial n} ds \qquad (2.41)$$

$$g_{ij} = \int_{F_j} \ln r (P_i Q) \, ds (Q) \qquad (2.42)$$

şeklinde tanımlandığında (2.40) denklemi matris formunda

$$[H] (\underset{\sim}{u}) = [G] \frac{\partial \underset{\sim}{u}}{\partial n} \qquad (2.43)$$

olarak yazılabilir. (2.43) denkleminde $\underset{\sim}{u}$ ve $\frac{\partial \underset{\sim}{u}}{\partial n}$

$$\underset{\sim}{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T \qquad (2.44\ a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial n}, \frac{\partial u_2}{\partial n}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial n} \right)^T \qquad (2.44\ b)$$

(M x 1) boyutlu vektörlerdir. (2.43) denklemi iyi konmuş sınır değer problemleri için M bilinmeyenli M denklemli doğrusal cebirsel denklem sistemini ifade eder.

Sınır değerlerinin (2.23 a), (2.23 b) ile bilinen değerleri (2.43) denkleminde $\underset{\sim}{u}_j$ ve $\frac{\partial \underset{\sim}{u}_j}{\partial n}$ yerine konularak denklem yeniden düzenlendiğinde;

$$A = [\, a_{ij} \,] \;,\; \underset{\sim}{f} = \{\, f_i \,\}$$

olmak üzere

$$[A]\ \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}$$

şeklinde yazılabilir. (2.45) M bilinmeyenli M denklemli doğrusal cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde $u(\underset{\sim}{x})$ çözüm fonksiyonunun ve $\frac{\partial u(x)}{\partial n}$ normal türevinin sınır düğüm noktalarındaki yaklaşık sayısal değerleri olan (2.44 a) ve (2.44 b) çözümleri elde edilir.

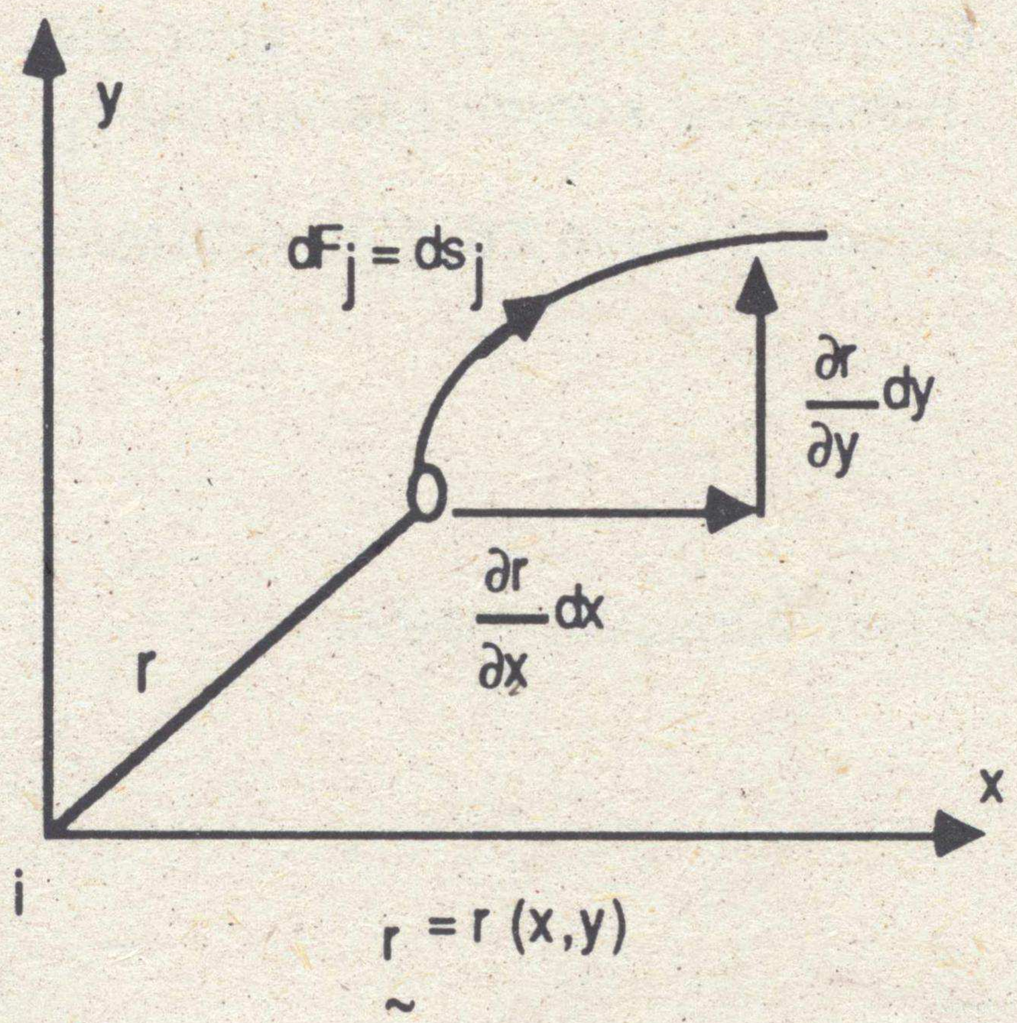
2.6. İyileştirilmiş Sınır Elemanlar Yöntemi

Sabit sınır elemanları kullanılan Sınır Elemanları Yaklaşımında $u(\underset{\sim}{x})$ çözüm fonksiyonunun ve $\frac{\partial u(x)}{\partial n}$ normal türevi her F_j sınır parçasının orta düğüm noktasında kendi sabit değerleri ile yaklaştırıldı. Matematiksel fiziğin bir çok probleminde u(x) ve $\frac{\partial u(\underset{\sim}{x})}{\partial n}$ genel olarak doğrusal veya daha yüksek mertebeden değişir. Sabit sınır elemanları kullanılması $u(\underset{\sim}{x})$ ve $\frac{\partial u(\underset{\sim}{x})}{\partial n}$ yaklaşık çözümleri elde etmedeki kolaylığa rağmen süreksizlik hallerinde kötü yaklaşımlara ve dolayısıyla hatalı sonuçlara neden olur. Bu çalışmada bu olumsuzluk sınır integral denklemlerin çözümlerine daha doğrusu yaklaşımlar veren izoparametrik tipte elemanlar kullanarak iyileştirilmiştir. İzoparametrik tip sınır elemanlarla yaklaşımda çözüm bölgesini (sınırının) geometrisi ve sınır data için aynı mertebeden polinomlar kullanılır. Bu durumda F sınırının her F_j $(j = 1,2,...,M)$ sınır parçası üzerinde $u(\underset{\sim}{x})$ çözüm fonksiyonu ve $\frac{\partial u(\underset{\sim}{x})}{\partial n}$ türevi polinom fonksiyonlar kullanarak yaklaştırılır. Sınır elemanları yaklaşımında kullanılan parçalı sürekli polinom yaklaşımı tekniğinde sınırın her F_j $(j = 1,2,...,M)$ parçasında doğrusal, kuadratik, kübik ve daha yüksek dereceden olan koordinat fonksiyonları oluşturulur.

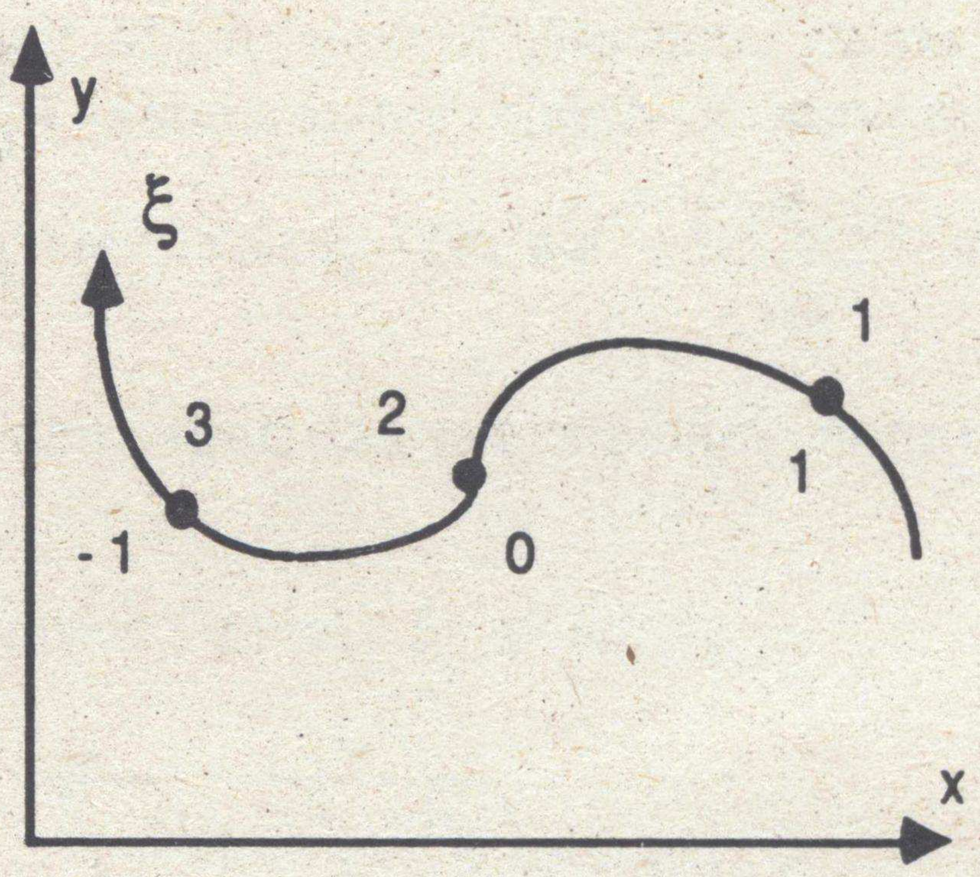
Kuadratik (İkinci Derece) Sınır Elemanları Yaklaşımı

Sınır elemanları yaklaşımında eğri sınırlarla verilen cismin geometrisini daha iyi belirtmek için kuadratik sınır elemanları kullanılır. F_j $(j = 1,2,...,M)$ sınır parçası üzerinde $u(\underset{\sim}{x})$ çözüm fonksiyonu ve $\frac{\partial u(\underset{\sim}{x})}{\partial n}$ normal

türevinin kuadratik değişimi alınır. F_j (j = 1,2,...,M) sınır parçası eğiresl koordinatlarla verilsin (Şekil 2.6).



(Şekil 2.6) - a Eğri Sınır Gösterilimi



(Şekil 2.6) - b Kuadratik Eleman

Koordinat fonksiyonları,

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2$$

$$-1 \le \xi \le 1 \qquad (2.46)$$

$$N_2(\xi) = 1 - \xi^2$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2$$

olmak üzere F_j (j = 1,2,...,M) sınır parçaları üzerindeki Q noktasının (x,y) koordinatları (2.46) denklemleri kullanılarak;

$$x(\xi) = \sum_{t=1}^{3} N_t(\xi)\, x_t^j \qquad (2.47\ a)$$

$$y(\xi) = \sum_{t=1}^{3} N_t(\xi)\, y_t^j \qquad (2.47\ b)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda u çözümü ve $\frac{\partial u}{\partial n}$ normal türevi Q düğüm noktasında

$$u(Q) = \sum_{t=1}^{3} u(P_{t,j})\ N_t(\xi) \qquad (2.48\ a)$$

$$\frac{\partial u(Q)}{\partial n} = \sum_{t=1}^{3} \frac{\partial u\,(P_{t,j})}{\partial n}\, N_t\,(\xi) \qquad (2.48\ b)$$

Parçalı kuadratik fonksiyonlarla yaklaştırılır. Burada $\left(x_t^j, y_t^j\right) F_j$ sınır elemanında, t. düğüm noktasındaki $P_{t,j}$ kaynak noktasının koordinatlarını, $u(P_{t,j})$ ve $\frac{\partial u\,(P_{t,j})}{\partial n}$ ise u(x) çözümü ve $\frac{\partial u\,(\underset{\sim}{x})}{\partial n}$ normal türevinin t.düğüm noktasına aranan yaklaşık sayısal değerlerini gösterir.

$\underset{\sim}{x}$ global ve $\underset{\sim}{\xi}$ lokal koordinat sistemlerinin dönüşüm matrisi

$$J_j\,(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{t=1}^{3} \frac{dN_t\,(\xi)}{d\xi}\, x_t^j\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{3} \frac{dN_t\,(\xi)}{d\xi}\, y_t^j\right)^2} \qquad (2.49)$$

olmak üzere F_j sınırının ds yay elemanı

$$ds\,(Q\,(\xi)\,) = ds_j = J_j\,(\xi)\, d\xi \qquad (2.50)$$

ile tanımlanır. F_j sınırı üzerinde P noktasında (2.35) ile tanımlanan C(P) iç açı ifadesi kullanılarak (2.36) sınır denklemi

$$\dot{E}_F [u(Q) - u(P)] \frac{\partial \ln r(P,Q)}{\partial n}\, ds(Q) = \dot{E}_F \frac{\partial u}{\partial n}\,(Q)\, \ln r\,(P,Q)\, ds(Q) \qquad (2.51)$$

şeklinde yazılabilir. (2.46) ve (2.49) denklemleri kullanılarak

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{t=1}^{3} u\,(P_{t,j} \int_{F_j} N_t\,(\xi) \frac{\partial \ln r\,(P_i,\, Q(\xi)\,)}{\partial n} J_j\,(\xi)\, d\xi$$

$$- u\,(P_i) \sum_{j=1}^{M} \int_{F_j} \frac{\partial \ln r\,(P_i,\, Q(\xi)\,)}{\partial n} J_j\,(\xi)\, d\xi \qquad (2.52)$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \sum_{t=1}^{3} \frac{\partial u\,(P_{t,j}}{\partial n} \int_{F_j} N_t\,(\xi)\, \ln r\,(P_i,\, Q(\xi))\, J_j\,(\xi)\, d\xi$$

elde edilir. Burada M sınır parçası, Fj j. aralıktır. Fj aralığı referans sınır elemanın [-1, 1] aralığı olarak alınır.

H matrisinin elemanları

$$h^{t}_{ij}(P) = \int_{-1}^{1} N_t(\xi) \frac{\partial \ln r(P_i, Q(\xi))}{\partial n} J_j(\xi)\, d\xi \qquad (2.53\ a)$$

$$h'_{ij}(P) = \int_{-1}^{1} \frac{\partial \ln r(P_i, Q(\xi))}{\partial n} J_j(\xi)\, d\xi \qquad (2.53\ b)$$

ile, G matrisinin elemanları ise

$$g^{t}_{ij} = \int_{-1}^{1} N_t(\xi) \ln r(P_i, (\xi)) J_j(\xi)\, d\xi \qquad (2.54)$$

ile gösterilirse (2.52) denklemi

$$\sum_{j=1}^{M} \left[\sum_{t=1}^{3} u(P_{t,j})\, h^{t}_{i,j} - u(P_j)\, h'_{i,j} \right] = \sum_{j=1}^{M} \sum_{t=1}^{3} \frac{\partial u(P_{t,j})}{\partial n} g^{t}_{ij} \qquad (2.55)$$

şeklinde yazılabilir.

Bileşenleri

$$U_{2N-1} = u(P_{1,N}) \qquad N = 1,2,\ldots,M$$

$$U_{2N} = u(P_{2,N}) \qquad N = 1,2,\ldots,M$$

olan 2M sayıda vektör U ile, bileşenleri

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{2N-1} = \frac{\partial U}{\partial n}(P_{1,N}) \qquad (N = 1,2,\ldots,M)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{2N} = \frac{\partial u}{\partial n}(P_{2,N}) \qquad (N = 1,2,\ldots,M)$$

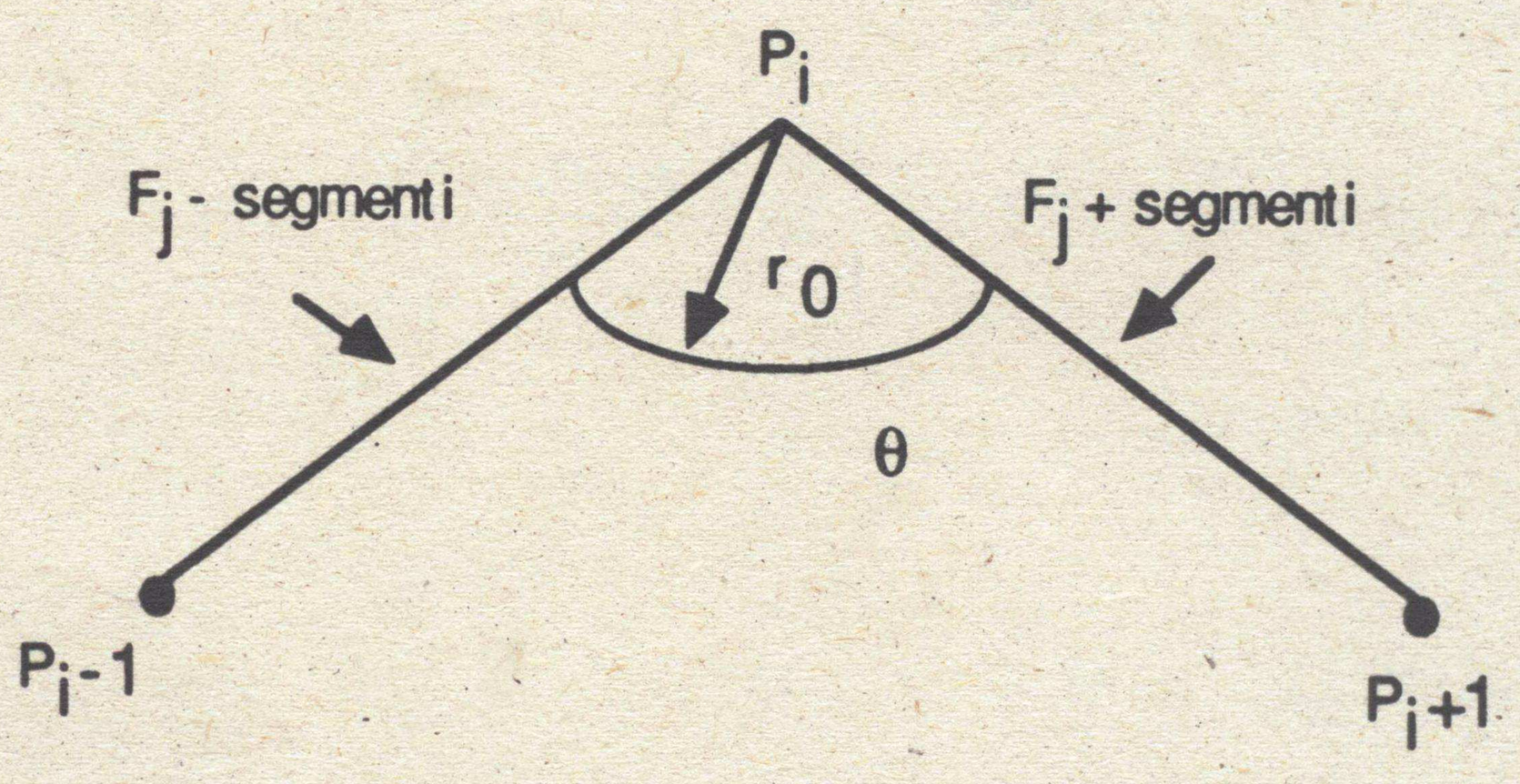
olan 2M sayıda vektör $\frac{\partial U}{\partial n}$ ile gösterilirse (2.55) denklemi matris formunda

$[H]\ \underset{\sim}{U} = [G]\ \underset{\sim}{U}_n$ olarak yazılabilir.

Sınır değerlerin (2.23 a) ve (2.23 b) denklemleri ile bilinen değerleri (2.56) matris denkleminde yerine konularak denklem düzenlenirse 2M bilinmeyenli 2M denklemli doğrusal cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülerek çözüm fonksiyonunun ve normal türevinin düğüm ndktalarındaki yaklaşık sayısal değerleri elde edilir.

Doğrusal (Birinci Derece) Sınır Elemanlar Yaklaşımı

Doğrusal sınır eleman yaklaşımında (2.37) denklemi ile verilen sınır parçaları üzerinde $u(\underset{\sim}{x})$ çözüm fonksiyonu ve $\frac{\partial u(x)}{\partial n}$ normal türevinin doğrusal değişimi alınır. F_j = (j = 1,2,....,M) sınırı boyunca karşılaşan iki doğrusal eleman Şekil (2.7) de gösterildiği gibi verilsin.



Şekil (2.7) Sınır boyunca i. düğüm noktasında karşılaşan iki doğrusal sınır eleman

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$-1 \leq \xi \leq 1 \qquad (2\,57)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

olmak üzere F_j = (j = 1,2,....,M) sınır parçaları üzerindeki Q noktasının (x,y) koordinatları (2.57) denklemleri kullanılarak

$$x(\xi) = \sum_{t=1}^{2} N_t(\xi)\, x_t^j \,,\quad y(\xi) = \sum_{t=1}^{2} N_t(\xi)\, y_t^j \qquad (2.58\ a,b)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda u çözümü ve $\frac{\partial u}{\partial n}$ normal türevi $F_j = (j = 1,2,....,M)$ segmentleri boyunca Q noktasında

$$u(Q) = \sum_{t=1}^{2} u(P_{t,j})\, N_t(\xi) \qquad (2.59\ a)$$

$$\frac{\partial u(Q)}{\partial n} = \sum_{t=1}^{2} \frac{\partial u(P_{t,j})}{\partial n} N_t(\xi) \qquad (2.59\ b)$$

parçalı doğrusal fonksiyonlarla yaklaştırılır. (2.58 a,b) denkleminde (x_t^j, y_t^j) $F_j = (j = 1,2,....,M)$ sınır elemanının t. düğüm noktadaki $P_{t,j}$ kaynak noktanın koordinatlarıdır. (2.51) ve (2.57) denklemleri kullanılarak sınır denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{t=1}^{2} u(P_{t,j})\left[\int_{F_J^-} N_t(\xi)\frac{\partial nr(P_i, Q)}{\partial n}ds + \int_{F_J^+} N_t(\xi)\frac{\partial nr(P_i, Q)}{\partial n}ds\right]$$

$$-u(P_i)\sum_{J=1}^{M}\int_{F_J}\frac{\partial \ln r(P_i, Q)}{\partial n}ds$$

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{t=1}^{2}\frac{u(P_{t,j})}{\partial n}\left[\int_{F_J} N_t(\xi)\ln r_+(P_i, Q)\,ds + \int_{F_J} N_t(\xi)\ln r_+(P_i, Q)\,ds\right] \qquad (2.60)$$

(2.60) denkleminin yazılışında her t. düğüm noktasının F_{j-1} ve F_j gibi her ardışık sınır elemanda (segmentte) bulunduğu gözönüne alınmıştır.

H matrisinin elemanları

$$h_{ij}^{t} = \int_{-1}^{1} N_t(\xi)\frac{\partial \ln r(P_i, Q)}{\partial n}ds \qquad (2.61\ a)$$

$$h_{ij}^{t} = \int_{-1}^{1}\frac{\partial \ln r(P_i, Q)}{\partial n}ds \qquad (2.61\ b)$$

ile, G matrisinin elemanları

$$g_{ij}^{t} = \int_{-1}^{1} N_t(\xi)\ln r(P_i, Q)\,ds \qquad (2.62)$$

ile gösterilirse (2.60) denklemi

$$\sum_{j=1}^{M}\left[\sum_{t=1}^{2} u(P_t,j)\, h_{ij}^{t} - u(P_i)\, h_{ij}^{\cdot}\right] = \sum_{j=1}^{M}\sum_{t=1}^{2} \frac{\partial u(P_t,j)}{\partial n}\, g_{ij}^{t} \qquad (2.63)$$

olarak elde edilir. (2.63) denklemi kuadratik sınır elemanlarda olduğu gibi matris formunda

$[H]\,\underset{\sim}{U} = [G]\,\underset{\sim}{U}_n$ şeklinde yazılabilir.

Sınır değerlerin (2.23 a), (2.23 b) denklemleri ile bilinen değerleri (2.64) matris denkleminde yerine konularak denklem yeniden düzenlenirse M bilinmeyenli, M denklemli doğrusal cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü, u çözüm fonksiyonu ve $\frac{\partial u}{\partial n}$ normal türevinin düğüm noktalarındaki yaklaşık sayısal değerlerini verir.

3. LAPLACE DENKLEMİ İLE VERİLEN PROBLEME UYGULAMA

Bu bölümde 2.Bölümde verilen Ağırlıklı Artıklar Yönteminin uygulaması ile elde edilen Sınır Elemanları Yönteminin sayısal uygulaması akışkanlar mekaniği, elastodinamik, jeofizik gibi uygulama alanlarında karşılaşılan Laplace diferansiyel denklemi ile verilen (2.22), (2.23 a), (2.23 b) sınır değer problemine parçalı sabit, parçalı doğrusal ve parçalı kuadratik polinom yaklaşımı ile elde edilmiştir. Bu yöntemle elde edilen sonuçlar problemin tam (analitik) çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

Birim yarıçaplı dörtte bir pozitif R daire bölgede ve bölgenin $\partial R = F$ sınırında

$$R + \partial R = \bar{R} = \{ (x,y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

bölgesinde, Şekil (3.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (3.1)$$

Laplace diferansiyel denklemi ve

$$u(x,y) = -x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + y^3 \qquad (3.2)$$

Dirichlet sınır koşulu ile verilen problemin tam çözümü değişkenlerine ayırma yöntemi ile

$$u(x,y) = -x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + y^3 \qquad (3.3)$$

olarak bulunmuştur.

$\bar{R} = R + \partial R$ bölgesi bölgenin simetrik olması göz önüne alınarak $y = x$ doğrusu ile bölünmüş böylece (3.1) Laplace diferansiyel denkleminin çözümü sekizde bir pozitif dairesel bölgede yapılmıştır Şekil (3.1) Problemin sınır elemanlar yöntemi ile yaklaşık çözümü kuadratik tip sınır elemanlar kullanılmıştır. Çözüm bölgesi farklı uzunluktaki üç kuadratik sınır elemana ayrılarak altı düğüm noktası için Şekil (3.1) de görüüldüğü gibi (2.46) ile verilen koordinat fonksiyonları kullanılarak yaklaşık çözüm elde edilmiştir. (2.46) daki $N_1(\xi)$, $N_2(\xi)$ ve $N_3(\xi)$ koordinat fonksiyonları kullanılarak 1., 2. ve 3. sınır elemanlar $x(\xi)$ ve $y(\xi)$ kartezyen koordinatlar (2.47 a) ve (2.47 b) denklemleri ile

$$x(\xi) = -0.13 + 0.13\ \xi^2$$

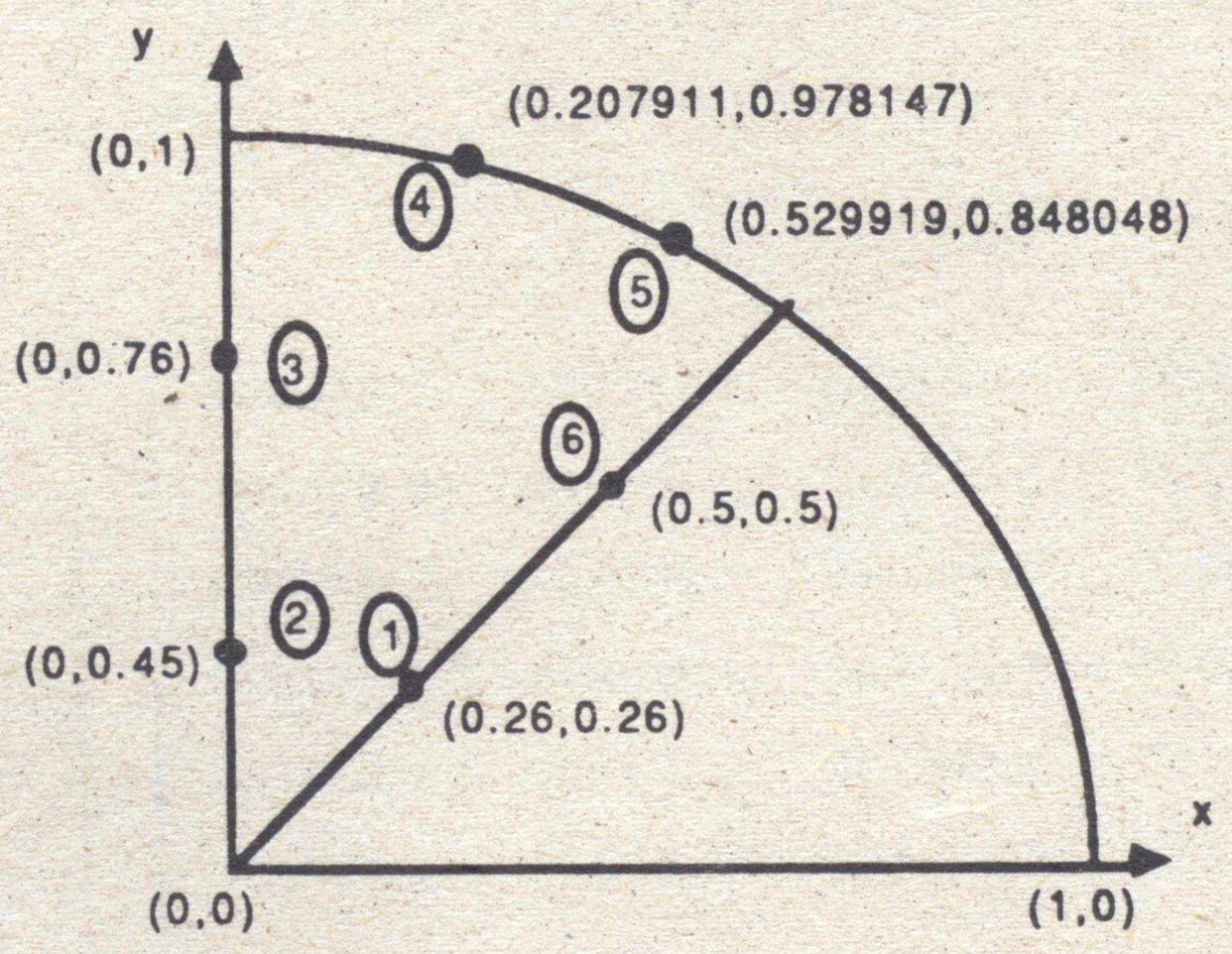
$$y(\xi) = 0.45 + 0.25\ \xi + 0.06\ \xi^2$$

$$x(\xi) = 0.207911 + 0.2649595\ \xi + 0.0570485\ \xi^2$$

$$y(\xi) = 0.978147 + 0.044024\ \xi - 0.174123\ \xi^2$$

$$x(\xi) = 0.5 - 0.1349595\ \xi - 0.1050405\ \xi^2$$

$$y(\xi) = 0.5 - 0.294024\ \xi + 0.0540424\ \xi^2$$



Şekil (3.1) Seçilen üç Kuadratik sınır eleman ve altı düğüm noktası için çözüm bölgesi

şeklinde elde edilir. (3.2) denklemi kullanılarak Şekil (3.1) deki

(1) , (2) , (3) , (4) , (5) , (6) , düğüm noktalarındaki sınır koşulları

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0,\ u_2 = 0.091125,\ \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0,\ u_4 = 1.396798,\ \frac{\partial u_5}{\partial n} = 2,\ u_6 = 0 \qquad (3.5)$$

olup, 1. sınır elemanın P_1 (0.26 , 0.26) düğüm noktası için (2.55) sınır denklemi

$$\sum_{t=1}^{3} u(P_{t,1})\, \overset{t}{h}_{11} - u(P_1)\, \overset{\cdot}{h}_{11} \sum_{t=1}^{3} \frac{\partial u(P_{t,1})}{\partial n} (\overset{t}{g}_{11}) \qquad (3.6)$$

şeklinde yazılır, denklemdeki $\overset{t}{h}_{ij}, \overset{\cdot}{h}_{ij}, \overset{t}{g}_{ij}$ integralleri sekiz nokta Gauss-Legendre kuadratür kuralı ile hesaplanır. Diğer sınır elemanlar üzerindeki integralleri $\overset{t}{h}_{ij}, \overset{\cdot}{h}_{ij}, \overset{t}{g}_{ij}$ benzer şekilde hesaplanarak (3.5) sınır koşulları ile

$$\begin{bmatrix}
-3.1411592 & 0 & -0.143603 & -0.559586 & -0.206653 & 0 \\
0 & -3.1411592 & -0.11489 & -0.585485 & -0.226194 & 0 \\
0 & 0 & 1.038994 & -0.702982 & -0.247853 & 0 \\
0 & 0 & -0.209567 & 0.359939 & -0.150343 & 0 \\
0 & 0 & -0.227967 & -0.553211 & -3.201375 & 0 \\
0 & 0 & -0.201649 & -0.700119 & -0.275261 & -3.1411592
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ 0.091125 \\ u_3 \\ 1.396798 \\ u_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
-0.016856 & -1.683816 & -0.204388 & -0.152678 & -0.152007 & -1.615041 \\
-0.867462 & -3.416404 & -0.638757 & -0.251287 & -0.186029 & -0.942207 \\
-0.336994 & -1.730311 & -1.375930 & -0.545346 & -0.285924 & -0.774399 \\
-0.196699 & -0.802373 & -0.536809 & -1.029400 & -0.534391 & -0.803525 \\
-0.229561 & -0.581132 & -0.241575 & -0.514796 & -1.401499 & -1.578788 \\
-0.818190 & -0.957591 & 0.237[illegible] & -0.26[illegible]169 & -0[illegible]03647 & 3.2375[illegible]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} \\ 0 \\ \frac{\partial u_4}{\partial n} \\ 2 \\ \frac{\partial u_6}{\partial n} \end{bmatrix} \qquad (3.7)$$

denklemi elde edilir. (3.7) denklemi [A] $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}$ şeklinde yeniden düzenlenirse

$$\begin{bmatrix} -3.1411592 & 1.683816 & -0.143603 & 0.152678 & -0.206653 & 1.615041 \\ 0 & 3.416404 & -0.114879 & 0.251287 & -0.226194 & 0.942207 \\ 0 & 1.730311 & 1.038994 & 0.545346 & -0.247853 & 0.774399 \\ 0 & 0.802373 & -0.209567 & 1.029400 & -0.150343 & 0.803525 \\ 0 & 0.581132 & -0.227967 & 0.514796 & -3.201375 & 1.578788 \\ 0 & 0.957591 & -0.201649 & 0.265169 & -0.275261 & 3.237566 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} \\ u_3 \\ \frac{\partial u_4}{\partial n} \\ u_5 \\ \frac{\partial u_6}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.10343 \\ 0.732023 \\ 0.410075 \\ -1.571544 \\ -2.030274 \\ -0.22937 \end{bmatrix}$$

(3.8)

şeklinde altı bilinmeyenli, altı tane doğrusal cebirsel denklem sistemi elde edilir. (3.8) denklem çözülerek düğüm noktalarındaki yaklaşık ve tam çözümler.

Nokta	Analitik Çözüm	Yaklaşık Yöntem
1	$u_1 = 0.000000$	$u_1 = 0.112079$
2	$\frac{\partial u_2}{\partial n} = 0.000000$	$\frac{\partial u_2}{\partial n} = 0.377062$
3	$u_3 = 0.438976$	$u_3 = 0.702434$
4	$\frac{\partial u_4}{\partial n} = 1.999997$	$\frac{\partial u_4}{\partial n} = 1.642200$
5	$u_5 = 0.889993$	$u_5 = 0.403425$
6	$\frac{\partial u_6}{\partial n} = 0.000000$	$\frac{\partial u_6}{\partial n} = 0.030180$

olarak bulunmuştur.

4. SONUÇ

Sınır elemanlar yönteminin uygulanmasında Laplace diferansiyel denkleminin birim çember üzerinde verilen sınır koşulları altında kuadratik sınır elemanların seçimi ile yaklaşık çözümün aranması ve çözüm bölgesinin sınırı üzerinde düğüm nokta sayısının altı alınması ile (şekil 3.1) düğüm noktalarında elde edilen yaklaşık sayısal çözümlerin tam (analitik) çözüm ile en iyi uyuştuğu sonucuna varılmıştır. Çözüm bölgesinin sınırı üzerindeki düğüm noktaları sayısının arttırılması veya eğri sınır geometrisinin daha iyi ifade edilebildiği kübik sınır elemanların kullanılması ile probleme daha geçerli yaklaşımlar bulunabilir.

SUMMARY

In this study, the Residual Method is given for the determination of the Boundary Element Method which is a numerical prosedure for the approximate solution of boundary value problems have a differential operator L and the boundary integral equations are obtained for this operator.

The variational formula..on of boundary value problems is explained and the variational formulation based on generalized Green's formula is represented in terms of fundamental solution of the problem.

Boundary Element Method is devoloped for the plane potential problems, which have curved boundaries, governed by Laplace's operator. In the discretitazion of the method, constant, linear and quadratic boundary elements are employed for the determination of the numerical approximate value of the unknown function at the boundary node points. The application of the method is presented using quadratic boundary elements and the obtained numerical are compared with the exact solutions.

KAYNAKÇA

Brebbia, C.A. "Topics in Boundary Element Research" Vol. 1: **Basic Principles and Applications**, Springer Verlag, Berlin, 1984.

Brebbia, C.A., Teller, J.C.F., Wrobel, L.C. **"Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering"**, Springer Verlag, Berlin, 1984.

Brebbia, C.A. "Boundary Element Techniques in Computer Aided Engineering" **NATO ASI Series**, Prooceding of the Nato Advanced Study Institute, 1984.

Dhatt, G., **"The Finite Element Method Displayed"** John Wiley and Sons, New York, 1984.

Fairweather, G., Rizzo, F.J., Shippy, D.J. "On the Numerical Solution of Two Dimensional Potential Problems by a Improved Boundary Integral Equation Method" **Journal of Computational Physics**, 31, 96-112, 1979.

Jaswon, M.A., Symm, G.T. **"Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastatics"** Academic Press, London and New York, 1977.

Stroud, A.H., Secrets, D. **"Gaussian Quadrature Formulas"** Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J. 1966.

Symm, G.T. "Integral Equation Methods in Potential Theory" II, **Proceeding Royal Society, Series A**, 275, 33-46, 1963.